ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Euler και θεωρία αριθμών

Από όλους τους κλάδους των μαθηματικών, κανένας δεν είναι τόσο φυσικός –ούτε τόσο παραπλανητικά δύσκολος– όσο η θεωρία αριθμών. Το αντικείμενό της είναι η κατανόηση των φυσικών αριθμών, που είναι σίγουρα οι πιο θεμελιώδεις μαθηματικές οντότητες. Στον αμύητο, η θεωρία αριθμών φαίνεται πολύ πιο απλή απ' ό,τι τα πιο περίπλοκα ξαδέλφια της όπως η τριγωνομετρία ή ο απειροστικός λογισμός. Σε τελική ανάλυση, ακόμα κι ένα οκτάχρονο παιδί μπορεί να μετρήσει μέχρι το πενήντα, αλλά πόσα τέτοια παιδιά γνωρίζουν τον νόμο των συνημιτόνων ή τον κανόνα της αλυσίδας;

Ωστόσο, ακόμα και η ελάχιστη έκθεση ενός αμύητου στη θεωρία αριθμών αρκεί για να διαλύσει αυτή την πλάνη. Στην πραγματικότητα, από τους φαινομενικά αθώους ακέραιους αριθμούς πηγάζουν μερικά από τα πιο βαθιά και πιο εκνευριστικά προβλήματα των μαθηματικών. Κρύβοντας τα μυστικά τους με ενοχλητική ευκολία, οι ακέραιοι αποτελούν μια πρόκληση αντάξια των μεγαλύτερων μαθηματικών.

Οι τέλειοι αριθμοί, που είναι το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου, προσέλκυσαν το ενδιαφέρον των μαθηματικών ήδη από την κλασική εποχή. Ο Ευκλείδης (π. 300 π.Χ.) συμπεριέλαβε ένα θεώρημα σχετικά με αυτούς στο αριστούργημά του *Στοιχεία*, και είκοσι αιώνες αργότερα ο Leonhard Euler επανήλθε στο θέμα αυτό για να ολοκληρώσει αυτό που είχε αρχίσει ο Ευκλείδης. Ωστόσο, ακόμα και ο Euler άφησε σημαντικά ερωτήματα αναπάντητα. Μέχρι και σήμερα, όπως συμβαίνει με τόσα πολλά ζητήματα στη θεωρία αριθμών, το τελευταίο κεφάλαιο δεν έχει ακόμα γραφτεί, και η αναζήτηση για τέλειους αριθμούς, σύμφωνα με τους Victor Klee και Stan Wagon, «είναι ίσως το παλαιότερο ανολοκλήρωτο έργο των μαθηματικών».[†]

[†]Victor Klee & Stan Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, 1991, σ. 178.

Πρόλογος

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αναγνωρίζονται ακόμα και από μη μαθηματικούς ως το επιφανέστερο έργο γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων. Ωστόσο, πολλοί εκπλήσσονται όταν μαθαίνουν ότι ο Ευκλείδης αφιέρωσε τρία από τα δεκατρία βιβλία (ή κεφάλαια) των *Στοιχείων* στη θεωρία αριθμών.

Το γεγονός αυτό αντανακλά μια παράδοση της αρχαίας ελληνικής σκέψης που ανάγεται στους πυθαγόρειους φιλοσόφους του έκτου αιώνα π.Χ. Για αυτούς, οι ακέραιοι αριθμοί ήταν κάτι παραπάνω από απλές μαθηματικές αφαιρέσεις – ήταν αντικείμενα λατρείας και στοχασμού, συνυφασμένα με την ίδια τη δομή της Φύσης. Οι πυθαγόρειοι απέδιδαν στους ακέραιους αριθμούς μια σπουδαιότητα που συνδεόταν όχι μόνο με τα μαθηματικά αλλά και με τον μυστικισμό.

Εργαζόμενος στο πλαίσιο αυτής της παράδοσης, ο Ευκλείδης ξεκίνησε το Βιβλίο VII των *Στοιχείων* με 22 ορισμούς. Ορισμένοι είναι εύκολα αναγνωρίσιμοι σήμερα. Για παράδειγμα, ο Ευκλείδης όρισε ως «πρώτο αριθμό» έναν αριθμό που «μετριέται μόνο με μια μονάδα». Άλλοι ορισμοί, όπως «ένας άρτιες φορές περιττός αριθμός» –τον οποίο ο Ευκλείδης όρισε ως «εκείνον ο οποίος μετριέται από έναν άρτιο αριθμό σύμφωνα με έναν περιττό αριθμό»– ακούγονται παράξενοι στα αυτιά μας.

Ο ορισμός που μας ενδιαφέρει σε αυτό το κεφάλαιο, και ο τελευταίος στον κατάλογό του, ήταν ο εξής:

Ορισμός. **Τέλειος** αριθμός είναι εκείνος ο αριθμός που ισούται με τα μέρη του.

Η ορολογία αυτή μπορεί να προκαλέσει κάποια σύγχυση στον σύγχρονο αναγνώστη. Η κατάσταση αποσαφηνίζεται αν αναγνωρίσουμε ότι, για τον Ευκλείδη, «μέρος» σήμαινε «γνήσιος ακέραιος διαιρέτης», και «ισούται» σήμαινε «ισούται με το άθροισμα των». Με αυτές τις τροποποιήσεις, η διατύπωση του Ευκλείδη μετασχηματίζεται στο σύγχρονο ισοδύναμό της:

Ορισμός. Ένας ακέραιος αριθμός είναι **τέλειος αν** ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 6 είναι τέλειος, διότι οι γνήσιοι διαιρέτες του είναι οι 1, 2 και 3, και $1 + 2 + 3 = 6$. Άλλοι τέτοιοι αριθμοί είναι το 28 ($1+2+4+7+14 = 28$), το 496 ($1+2+4+8+16+31+62+124+248 = 496$) και το 8128 ($1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128$). Αυτοί οι τέσσερεις αριθμοί ήταν οι μόνοι τέλειοι αριθμοί που ήταν γνωστοί στην αρχαία Ελλάδα, και κανένας άλλος αριθμός κάτω από το 10.000 δεν παρουσιάζει τέτοια «τελειότητα». Προφανώς οι αριθμοί αυτοί είναι λίγοι και απομακρυσμένοι μεταξύ τους.

Ο Νικόμαχος, ένας Έλληνας μαθηματικός του πρώτου αιώνα, έτρεφε ιδιαίτερη εκτίμηση για αυτούς τους αριθμούς. Παρατήρησε ότι οι τέλειοι αριθμοί είναι αξιοσημείωτοι και σπάνιοι, «όπως τα δίκαια και άριστα πράγματα είναι λίγα … ενώ τα άσχημα και τα φαύλα αφθονούν».* Και στους αιώνες που ακολούθησαν, η ζωηρή φαντασία των λογίων προσέδωσε στους τέλειους αριθμούς μια εντελώς εξωτική σπουδαιότητα. Για παράδειγμα, ο αριθμός 6 εθεωρείτο ότι αντιπροσωπεύει την *τέλεια* ένωση των δύο φύλων, διότι $6 = 3 \times 2$, όπου το 3 είναι «αρσενικός» αριθμός και το 2 «θηλυκός» (για λόγους που θα πρέπει να είναι προφανείς σε οποιονδήποτε έχει στοιχειώδεις γνώσεις ανατομίας). Είναι σαφές πως οι πρόγονοί μας έβαλαν στους ώμους των τέλειων αριθμών ένα αρκετά βαρύ φορτίο.

Ο Ευκλείδης αγνόησε αυτού του είδους τις αριθμολογικές ανοησίες και προσέγγισε το ζήτημα από καθαρά μαθηματική σκοπιά. Παρότι όρισε τους τέλειους αριθμούς ήδη από την αρχή του Βιβλίου VII, δεν τους ανέφερε καθόλου ξανά μέχρι το τέλος του Βιβλίου IX – δηλαδή μέχρι την τελευταία αριθμοθεωρητική πρόταση των *Στοιχείων*. Αναμφίβολα, κράτησε το καλύτερο για το τέλος, διότι το θεώρημά του έμεινε στην ιστορία, παρέχοντας μια έξοχη συνταγή για τους τέλειους αριθμούς.

Το αποτέλεσμα, η Πρόταση 36 του Βιβλίου IX, διατυπώθηκε από τον Ευκλείδη ως εξής:

> Αν οσοιδήποτε αριθμοί επιθυμούμε με αφετηρία τη μονάδα παρατεθούν συνεχώς σε διπλή αναλογία, μέχρι το άθροισμα όλων τους να γίνει πρώτος αριθμός, και αν το άθροισμα πολλαπλασιασμένο επί τον τελευταίο δώσει κάποιον αριθμό, το γινόμενο θα είναι τέλειο.

Ο σύγχρονος αναγνώστης θα μείνει δικαιολογημένα με μια απορημένη έκφραση. Και αυτή η πρόταση χρειάζεται κάποια μετάφραση.

Κατ' αρχάς, το τμήμα που αναφέρεται στο να ξεκινήσουμε από τη μονάδα και να προχωρήσουμε «σε διπλή αναλογία» είναι ο τρόπος του Ευκλείδη να περιγράψει τη σειρά $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$. Ο Ευκλείδης υπέθεσε ότι, αν συνεχιστεί αυτή η διαδικασία, το τελικό άθροισμα θα είναι ένας πρώτος αριθμός· με άλλα λόγια, υπέθεσε ότι το $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ είναι πρώτος. Κατόπιν, ισχυρίστηκε ότι όταν αυτό το άθροισμα «πολλαπλασιαστεί επί τον τελευταίο αριθμό» –δηλαδή όταν πολλαπλασιάσουμε το $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ επί 2^{k-1} (τον «τελευταίο» όρο του αθροίσματος)– το γινόμενο που θα προκύψει θα είναι τέλειος αριθμός.

*Νικόμαχος ο Γερασηνός, *Αριθμητική εισαγωγή* (Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, μετ. Martin L. D'ooge. U. of Michigan Press, 1938, σ. 209).

Προτού εξετάσουμε λεπτομερώς την απόδειξή του, παρατηρούμε ότι το $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ είναι μια πεπερασμένη γεωμετρική σειρά της οποίας το άθροισμα είναι $(2^k - 1)/(2 - 1) = 2^k - 1$. Συνεπώς, η πρόταση του Ευκλείδη, σε σύγχρονη ορολογία, παίρνει την εξής μορφή:

Θεώρημα. *Αν ο $2^k - 1$ είναι πρώτος και αν $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, τότε ο N είναι τέλειος.*

Απόδειξη. Έστω $p = 2^k - 1$ ο εν λόγω πρώτος. Βάσει της μοναδικής παραγοντοποίησης, οι γνήσιοι διαιρέτες του $N = 2^{k-1}(2^k - 1) = 2^{k-1}p$ θα πρέπει να περιλαμβάνουν μόνο τους πρώτους 2 και p. Αυτό σημαίνει ότι όλοι αυτοί οι γνήσιοι διαιρέτες μπορούν να παρατεθούν και να αθροιστούν:

$$
\begin{aligned}
&\text{Άθροισμα γνήσιων διαιρετών του } N \\
&\quad = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} + p + 2p + 4p + \cdots + 2^{k-2}p \\
&\quad = (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}) + p(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-2}) \\
&\quad = (2^k - 1) + p(2^{k-1} - 1) = p + p2^{k-1} - p \\
&\quad = p2^{k-1} = N.
\end{aligned}
$$

Αφού ο αριθμός N του Ευκλείδη ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, είναι τέλειος. *(ό.έ.δ.)*

Συνεπώς, ο Ευκλείδης είχε τεκμηριώσει μια ικανή συνθήκη για να είναι ένας αριθμός τέλειος. Για παράδειγμα, αν $k = 2$, τότε ο $2^2 - 1 = 3$ είναι πρώτος, και άρα ο $N = 2(2^2 - 1) = 6$ είναι τέλειος. Αν $k = 3$, τότε ο $2^3 - 1 = 7$ είναι πρώτος, οπότε παίρνουμε τον τέλειο αριθμό $N = 2^2(2^3 - 1) = 28$. Και αν $k = 13$, έχουμε ότι ο $2^{13} - 1 = 8191$ είναι πρώτος, οπότε προκύπτει το πολύ λιγότερο προφανές παράδειγμα $N = 2^{12}(2^{13} - 1) = 33.550.336$.

Πρόκειται για ένα έξοχο δείγμα θεωρίας αριθμών από 2300 χρόνια πριν. Ο Ευκλείδης όχι μόνο παρουσίασε μια έγκυρη απόδειξη, αλλά κατάφερε επίσης, από τους ελάχιστους τέλειους αριθμούς που ήταν γνωστοί εκείνη την εποχή, να διακρίνει ένα μοτίβο. Αξίζει τον έπαινό μας τόσο για τη μαθηματική του ακρίβεια όσο και για τη μαθηματική του *διορατικότητα*.

Βέβαια, το θεώρημα του Ευκλείδη αντικατέστησε ένα ερώτημα –την εύρεση τέλειων αριθμών– με ένα άλλο –την εύρεση πρώτων αριθμών της μορφής $p = 2^k - 1$. Δυστυχώς, αυτό το νέο ερώτημα είναι κάθε άλλο παρά εύκολο. Αυτού του είδους οι πρώτοι αριθμοί, που είναι κατά μία μονάδα μικρότεροι κάποιας δύναμης του δύο, έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στη θεωρία αριθμών. Σήμερα τους ονομάζουμε «πρώτους Mersenne», προς τιμήν του Marin Mersenne (1588-1648), ο οποίος τους έκανε ευρύτερα γνωστούς τον δέκατο έβδομο αιώνα, και είναι διάσημοι μεταξύ των πρώτων.

Για να πάρουμε μια αίσθηση της πολυπλοκότητάς τους, παρατηρούμε ότι αν ο k είναι σύνθετος, τότε ο $2^k - 1$ είναι επίσης σύνθετος. Αυτό έπεται από απλή άλγεβρα, διότι αν $k = ab$,

$$\begin{aligned} 2^k - 1 &= (2^a)^b - 1 \\ &= [2^a - 1][(2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} + \cdots + (2^a) + 1], \end{aligned}$$

και προφανώς το $2^a - 1$ είναι παράγοντας αυτού του αριθμού. Για παράδειγμα, αν $k = 6 = 2 \times 3$, έχουμε ότι $2^6 - 1 = (2^2)^3 - 1 = [2^2 - 1][(2^2)^2 + 2^2 + 1]$, πράγμα που επιβεβαιώνει το τετριμμένο γεγονός ότι το 63 (δηλαδή το $2^6 - 1$) διαιρείται δια 3 (δηλαδή με το $2^2 - 1$) και συνεπώς δεν είναι πρώτος.

Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να αποκλείσουμε από τους υποψήφιους πρώτους Mersenne κάποιους τεράστιους αριθμούς όπως το $2^{75} - 1$, αφού ο εκθέτης είναι σύνθετος. Αλλά –και εδώ ακριβώς περιπλέκονται τα πράγματα– δεν έπεται ότι αν ο k είναι πρώτος, τότε ο $2^k - 1$ είναι επίσης πρώτος. Το μικρότερο αντιπαράδειγμα είναι το $2^{11} - 1$, ένας αριθμός που, παρότι ο εκθέτης είναι πρώτος, παραγοντοποιείται ως $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

Η αναζήτηση για πρώτους Mersenne αποτελεί σημαντική πρόκληση. Σε μια επιστολή του το 1772 προς τον Daniel Bernoulli, ο Euler ισχυρίστηκε πως είχε επιβεβαιώσει ότι ο $2^{31} - 1$ είναι πρώτος.* Αυτός είναι ο όγδοος μεγαλύτερος πρώτος Mersenne και, χάρις στο παραπάνω θεώρημα του Ευκλείδη, παράγει τον τέλειο αριθμό

$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2.305.843.008.139.952.128.$$

Στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα, το παράδειγμα αυτό περιγραφόταν ως

> …ο μεγαλύτερος [τέλειος αριθμός] που θα ανακαλυφθεί ποτέ, διότι, καθώς οι αριθμοί αυτοί είναι απλώς αξιοπερίεργοι και όχι χρήσιμοι, δεν είναι πιθανό να επιχειρήσει οποιοσδήποτε να βρει κάποιον πέρα από αυτόν.†

Παρά την απαισιόδοξη αυτή πρόβλεψη, η έρευνα συνεχίστηκε. Στις μέρες μας, όπου οι μαθηματικοί επιστρατεύουν τους υπολογιστές για να βρουν έναν νέο μεγαλύτερο πρώτο, ψάχνουν πάντοτε ανάμεσα στους αριθμούς τύπου Mersenne. Μάλιστα, άπαξ και βρεθεί ένας νέος «μεγαπρώτος», είναι πιθανό να του δοθούν λίγα εκατοστά χώρου στις καθημερινές εφημερίδες, όπως συνέβη

---

*Leonard Eugene Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Τόμ. I, G. E. Stechert & Co., Νέα Υόρκη, 1934, σ. 19.

†Stanley Bezuszka & Margaret Kenney, «Even Perfect Numbers: (Update)^2», *The Mathematics Teacher*, Τόμ. 90, Αρ. 8, 1997, σ. 632.

το 1998 όταν ανακοινώθηκε ότι ο $2^{3.021.377} - 1$ είναι πρώτος αριθμός (τύπου Mersenne).

Από την ανακάλυψη αυτή, σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα του Ευκλείδη από την αρχαιότητα, προκύπτει ως πόρισμα ότι ο $2^{3.021.376}(2^{3.021.377} - 1)$ είναι τέλειος αριθμός – ο 37ος που έχει βρεθεί τη στιγμή που γράφονται αυτές οι γραμμές. Ο συγκεκριμένος αριθμός έχει έκταση λίγο παραπάνω από $1{,}8$ εκατομμύρια ψηφία. Για να τον γράψουμε με το χέρι –ακόμα και με γρήγορο ρυθμό γραψίματος– θα χρειαζόμασταν εβδομάδες (εξαιρετικά βαρετής) εργασίας, και ίσως ακόμα και τότε κάποιος δύσπιστος να ήθελε να αθροίσει τους γνήσιους διαιρέτες αυτού του μεγαθήριου για να αποδείξει ότι είναι πράγματι τέλειος αριθμός.

Βέβαια, αυτός ο δύσπιστος απλώς θα έχανε τον χρόνο του. Το ζήτημα έχει διευθετηθεί ολοκληρωτικά και αδιάσειστα προ πολλού βάσει της επιχειρηματολογίας του Ευκλείδη. Ο δύσπιστος μπορεί να είναι σίγουρος ότι ο αριθμός $2^{3.021.376}(2^{3.021.377} - 1)$ είναι τέλειος, διότι ο Ευκλείδης έχει *αποδείξει* ότι είναι. Τέτοια είναι η καθοριστική και αιώνια ισχύς της λογικής.

Ο Ευκλείδης τεκμηρίωσε μια ικανή συνθήκη για να είναι ένας αριθμός τέλειος. Δηλαδή, απέδειξε ότι *αν* ένας αριθμός έχει μια ορισμένη μορφή, *τότε* θα είναι τέλειος. Δεν ισχυρίστηκε πουθενά ότι αυτή η συνθήκη ήταν επίσης αναγκαία – δηλαδή ότι *αν* ένας αριθμός είναι τέλειος, τότε θα πρέπει να έχει τη μορφή που περιέγραψε ο Ευκλείδης.

Το «ικανό» και το «αναγκαίο» είναι δύο εντελώς διαφορετικά πράγματα. Ας δούμε την πρόταση «Αν το X είναι ομελέτα, τότε το X περιέχει αυγά». Είναι ασφαλώς αληθής: το να είναι ένα αντικείμενο ομελέτα αρκεί για να διασφαλίσει ότι έχει μέσα του αυγά. Αλλά τα αντικείμενα που περιέχουν αυγά δεν είναι *αναγκαστικά* ομελέτες: (σκεφτείτε ένα κις, μια κρέπα, ή ακόμα και μια κότα). Ο Ευκλείδης είχε προσφέρει λοιπόν κάτι λειψό, το οποίο, αν και καλύτερο από το τίποτα, υπολειπόταν της βέλτιστης κατάστασης.

Η διαφορά μεταξύ αναγκαίου και ικανού οδήγησε σε ένα ατυχές λάθος πολλούς αιώνες αργότερα. Το 1509, ο Carolus Bovillus (1470-1553) παρουσίασε μια απόδειξη ότι κάθε *τέλειος* αριθμός είναι άρτιος.[*] Το σκεπτικό του είχε ως αφετηρία έναν τέλειο αριθμό. Παραπέμποντας στον Ευκλείδη, ο Bovillus ισχυρίστηκε ότι ο αριθμός θα πρέπει να έχει τη μορφή $2^{k-1}(2^k-1)$, όπου το (2^k-1) είναι πρώτος. Αλλά ένας τέτοιος αριθμός έχει έναν παράγοντα 2 μπροστά του (μάλιστα, έχει $k - 1$ τέτοιους παράγοντες), και συνεπώς είναι καταφανώς άρτιος.

Η «απόδειξη» αυτή είναι σύντομη, εύκολη και λανθασμένη. Ισχυριζόμενος ότι ένας τέλειος αριθμός θα πρέπει να έχει την ευκλείδεια δομή, ο Bovillus είχε

---

[*] Dickson, σ. 7.

μπερδέψει το ικανό με το αναγκαίο. Το σφάλμα του ήταν λογικά ισοδύναμο με το να συμπεράνει κάποιος ότι μια κότα είναι ομελέτα.

Μιλώντας για οδυνηρά λάθη, αξίζει να αναφέρουμε ότι το 1598 ένας μαθηματικός ονόματι Unicornus (1523-1610) «βελτίωσε» το θεώρημα του Ευκλείδη ισχυριζόμενος ότι αν το k είναι περιττό, τότε το $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ είναι τέλειος αριθμός.* Μεταξύ άλλων, αυτό θα διασφάλιζε ότι υπάρχουν απειράριθμοι τέλειοι αριθμοί, αφού σίγουρα υπάρχουν απειράριθμοι περιττοί αριθμοί k. Δυστυχώς, για $k = 9$, έχουμε ότι $N = 2^8(2^9 - 1) = 130.816$, του οποίου οι γνήσιοι διαιρέτες έχουν άθροισμα 171.696. Φυσικά, αυτό δεν αντιφάσκει καθόλου με τον Ευκλείδη, διότι το $2^9 - 1 = 511 = 7 \times 73$ δεν είναι πρώτος. Ο άμοιρος Unicornus είχε κάνει μια άσχημη γκάφα, όπως θα ήταν ίσως αναμενόμενο για κάποιον που έχει το όνομα ενός μυθολογικού πλάσματος.

Στην αυγή του δέκατου έβδομου αιώνα, το θεώρημα του Ευκλείδη αντιπροσώπευε ουσιαστικά όλα όσα ήταν γνωστά για τους τέλειους αριθμούς. Πλήρης χαρακτηρισμός –μια αναγκαία και ικανή συνθήκη– εξακολουθούσε να μην υπάρχει. Ο Καρτέσιος (René Descartes, 1596-1650), σε μια επιστολή του προς τον Mersenne στις 15 Νοεμβρίου του 1638, ανέφερε ότι κάθε *άρτιος* τέλειος αριθμός είναι «ευκλείδειος» – δηλαδή, κάθε άρτιος τέλειος αριθμός έχει τη μορφή $2^{k-1}(2^k - 1)$, όπου $k > 1$ και η έκφραση μέσα στις παρενθέσεις είναι πρώτος αριθμός.† Δυστυχώς, το σκεπτικό του δεν έχει διασωθεί πουθενά. Το αν είχε καταστρώσει μια απόδειξη η οποία στη συνέχεια χάθηκε ή αν διατύπωνε απλώς μια εικασία είναι κάτι που μάλλον δεν θα το μάθουμε ποτέ.

Η εικασία του Καρτέσιου δεν ήταν μόνο ενδιαφέρουσα αλλά και σωστή. Ωστόσο, την τεκμηρίωσή της έμελλε να την προσφέρει κάποιος άλλος.

Η ανάμειξη του Euler

Ο Euler απ' ό,τι φαίνεται δεν έδειξε κάποιο πρώιμο ενδιαφέρον για τη θεωρία αριθμών. Σε νεαρή ηλικία, γοητεύτηκε από τον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό, που την εποχή εκείνη αποτελούσαν ένα νέο και συναρπαστικό πεδίο έρευνας. Οι μαθηματικοί είχαν γοητευτεί από την ισχύ του απειροστικού λογισμού και την ευρύτατη εφαρμοσιμότητά του. Στη σύγχρονη φρασεολογία, το αντικείμενο ήταν «της μόδας». Συγκριτικά, η θεωρία αριθμών μετά βίας αντιμετωπιζόταν σαν σοβαρή μαθηματική ενασχόληση.

Σχεδόν όλοι ανάγουν τον ενθουσιασμό του Euler για τη θεωρία αριθμών σε έναν συγκεκριμένο μέντορα, τον Christian Goldbach. Ο Goldbach βρισκόταν στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης κατά την άφιξη του Euler το 1727,

*Όπ. π., σ. 10.

†Όπ. π., σ. 12.

και γνώρισε και εκτίμησε τον νεαρό συνάδελφό του. Λίγο αργότερα, πήγε στη Μόσχα, οπότε η επικοινωνία με τον Euler συνεχίστηκε μέσω επιστολών. Σε μία από αυτές τις επιστολές, με ημερομηνία 1 Δεκεμβρίου 1729, ο Goldbach αναφέρθηκε στο έργο του Pierre de Fermat (1601-1665) ρωτώντας:

> Γνωρίζεις την παρατήρηση του Fermat ότι όλοι οι αριθμοί $2^{2^n}+1$ είναι πρώτοι; Όπως είχε πει, δεν είχε καταφέρει να το αποδείξει· ούτε κανένας άλλος το έχει κατορθώσει απ' όσο ξέρω.[*]

Αρχικά, ο Euler αδιαφόρησε, αλλά μια μετέπειτα επιστολή παρακίνησης από τον Goldbach προκάλεσε το ενδιαφέρον του. Όπως διαπίστωσε, σε αυτό το ζήτημα ο Fermat είχε σφάλει, καθώς το $2^{2^5}+1 = 4.294.967.297$ διαιρείται ακριβώς με το 641.[†]

Αυτό ήταν απλώς η αρχή. Για τον Euler, η θεωρία αριθμών έγινε πάθος. Βυθίστηκε στην εργασία του Fermat, η οποία αποτέλεσε για αυτόν πηγή μεγάλης ομορφιάς και τέρψης. Στην πορεία της καριέρας του, ο Euler καταπιάστηκε με αριθμοθεωρητικά ζητήματα θεμελιώδους σημασίας καθώς και με θέματα σαφώς λιγότερο σημαντικά. Μεταξύ αυτών των τελευταίων ήταν μια πρόκληση να βρει τέσσερεις διαφορετικούς ακεραίους τέτοιους ώστε το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο από αυτούς να είναι τέλειο τετράγωνο. Με το τρομερό κουαρτέτο $18.530, 38.114, 45.986$ και 65.570, ο Euler έδωσε μια σωστή, αν και εντελώς αινιγματική από διαισθητικής πλευράς, απάντηση.[‡]

Η θεωρία αριθμών καταλαμβάνει τέσσερεις τόμους από τα *Opera Omnia* του Euler, και πολλά από τα αποτελέσματα που παρατίθενται σε αυτούς τους τόμους έχουν γίνει κλασικά. Όπως έχει παρατηρήσει ο Harold Edwards, ακόμη και αν η μαθηματική παραγωγή του Euler περιοριζόταν σε αυτά τα αποτελέσματα (πράγμα που επ' ουδενί *δεν* ισχύει), «η συνεισφορά του στη θεωρία αριθμών και μόνο θα αρκούσε για να του εξασφαλίσει αιώνια φήμη στα χρονικά των μαθηματικών».[§]

Για τον Euler, το ζήτημα των τέλειων αριθμών προέκυψε σχεδόν παρεμπιπτόντως, και καταλαμβάνει λιγότερο από μία σελίδα ενός εκτενούς άρθρου με τίτλο «De numeris amicabilibus», το οποίο πραγματεύεται τους λεγόμενους φίλιους αριθμούς.[¶] Για την ιστορία, δύο αριθμοί m και n λέγονται φίλιοι αν το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του m είναι n, και *αντιστρόφως*. Τα φίλια ζεύγη είναι αρκετά σπάνια· το μικρότερο είναι οι αριθμοί 220 και 284. Σε

---

[*] Weil, σ. 172.

[†] Σχετικά με το σκεπτικό του Euler, βλ. William Dunham, *Journey Through Genius· The Great Theorems of Mathematics*, Wiley, Νέα Υόρκη, 1990, Κεφάλαιο 10 [ελλ. έκδ.: *Τα μεγάλα θεωρήματα των μαθηματικών*, μτφρ. Θεοφάνης Γραμμένος, Αθήνα: Αλεξάνδρεια, 2013].

[‡] Euler, *Opera Omnia*, Σειρά I, Τόμ. 5, σσ. 330-336.

[§] Harold M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, Νέα Υόρκη, 1977, σ. 39.

[¶] Euler, *Opera Omnia*, Σειρά I, Τομ. 5, σσ. 353-365.

όλους τους αιώνες πριν από τον Euler, είχαν ανακαλυφθεί μόνο τρία ζεύγη. Ο ίδιος μόνος του, σε μια πραγματική έκρηξη ενορατικότητας, παρουσίασε άλλα 59 ζεύγη!

Στην πορεία της ανάλυσής του, ο Euler εισήγαγε την παρακάτω έννοια, που θα αποδεικνυόταν χρήσιμη στη μελέτη των φίλιων ζευγών και των τέλειων αριθμών:

Ορισμός. $\sigma(n)$ είναι το άθροισμα *όλων* των ακέραιων διαιρετών του n.

(Στο άρθρο του, ο Euler χρησιμοποίησε τον συμβολισμό $\int n$, αλλά οι σύγχρονοι συγγραφείς έχουν αντικαταστήσει το επίμηκες «S» με το πεζό ελληνικό γράμμα σίγμα.) Να σημειωθεί ότι ενώ ο Ευκλείδης είχε αθροίσει μόνο τους γνήσιους διαιρέτες του n, ο Euler θεώρησε σημαντικό να τους αθροίσει όλους. Η αλλαγή αυτή μπορεί να φαίνεται επουσιώδης, αλλά οδήγησε σε ορισμένες κρίσιμες παρατηρήσεις.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $\sigma(5) = 1+5 = 6$ και $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$. Προφανώς, το άθροισμα των *γνήσιων* διαιρετών του n είναι $\sigma(n)-n$. Αμέσως βλέπουμε ότι, από αυτή τη σκοπιά, οι m και n είναι φίλιο ζεύγος αν και μόνο αν παρουσιάζουν την όμορφη συμμετρία $\sigma(m) = m + n = \sigma(n)$.

Πιο συναφείς με το δικό μας ζήτημα είναι οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί των πρώτων και των τέλειων αριθμών.

1. Ο p είναι πρώτος αν και μόνο αν $\sigma(p) = p + 1$.

2. Ο N είναι τέλειος αν και μόνο αν $\sigma(N) = N + N = 2N$.

Θα χρειαστούμε τρεις ακόμα σημαντικές ιδιότητες:

3. Αν ο p είναι πρώτος, τότε $\sigma(p^r) = (p^{r+1} - 1)/(p - 1)$.

Αυτό έπεται επειδή οι μόνοι διαιρέτες μιας δύναμης πρώτου αριθμού p^r είναι οι δυνάμεις πρώτου αριθμού p^s με $0 \leq s \leq r$. Συνεπώς,

$$\sigma(p^r) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^r = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}.$$

Συγκεκριμένα, για $N = 2^r$, έχουμε ότι

$$\sigma(N) = \sigma(2^r) = \frac{2^{r+1} - 1}{2 - 1} = 2^{r+1} - 1 = 2(2^r) - 1 = 2N - 1.$$

Δηλαδή, μια δύναμη του 2 δεν είναι *ποτέ* τέλειος αριθμός, διότι για τέτοιες δυνάμεις το $\sigma(N)$ υπολείπεται κατά μία μονάδα του αριθμού $2N$ που απαιτείται για τελειότητα. Κοντά, αλλά όχι ακριβώς στον στόχο.

4. Αν οι p και q είναι διαφορετικοί πρώτοι, τότε $\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$.

Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση, παρατηρούμε ότι οι μόνοι διαιρέτες του pq είναι τα $1, p, q$ και το ίδιο το pq, επομένως $\sigma(pq) = 1 + p + q + pq = (1 + p) + q(1 + p) = (1 + p)(1 + q) = \sigma(p)\sigma(q)$. Ως αριθμητικό παράδειγμα, παρατηρούμε ότι $\sigma(21) = 1 + 3 + 7 + 21 = 32 = 4 \times 8 = \sigma(3) \times \sigma(7)$.

5. Αν οι a και b είναι σχετικά πρώτοι, τότε $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Αυτή η επέκταση του #4 μας λέει ότι η βασική απαίτηση δεν είναι η πρωτεία (primality) των a και b αλλά η *σχετική* τους πρωτεία. Εφόσον οι a και b δεν έχουν κανέναν κοινό παράγοντα εκτός από το 1, το αποτέλεσμα της εφαρμογής του σ στο γινόμενό τους ισούται με το γινόμενο της εφαρμογής του σ σε καθέναν από αυτούς ξεχωριστά. Αυτό το χαρακτηριστικό –η λεγόμενη «πολλαπλασιαστική ιδιότητα»– είναι κεντρικής σημασίας για το σκεπτικό που ακολουθεί και γενικότερα για τις περισσότερες πραγματεύσεις που αφορούν το σ. Η κοφτερή ματιά του Euler το εντόπισε αμέσως.*

Αν και δεν θα παραθέσουμε την απόδειξη του #5 (η οποία μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας αριθμών), η ουσία του μπορεί να γίνει κατανοητή αν εξετάσουμε την περίπτωση όπου $a = p^2$ και $b = qr$, και p, q και r είναι τρεις διαφορετικοί πρώτοι (οπότε οι a και b είναι σχετικά πρώτοι). Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε εύκολα να παραθέσουμε και να αθροίσουμε όλους τους διαιρέτες του ab:

$$\begin{aligned}
\sigma(ab) &= \sigma(p^2qr) \\
&= 1 + p + p^2 + q + pq + p^2q + r + pr + p^2r + qr + pqr + p^2qr \\
&= (1 + p + p^2) + q(1 + p + p^2) + r(1 + p + p^2) + qr(1 + p + p^2) \\
&= (1 + p + p^2)(1 + q + r + qr) = (1 + p + p^2)(1 + q)(1 + r) \\
&= \sigma(p^2)\sigma(q)\sigma(r) \\
&= \sigma(p^2)\sigma(qr) \qquad\qquad \text{βάσει του \#4} \\
&= \sigma(a)\sigma(b).
\end{aligned}$$

Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται και το γενικό θεώρημα. Χρησιμοποιώντας το, μπορούμε να προσδιορίσουμε γρήγορα το άθροισμα των διαιρετών οποιουδήποτε αριθμού του οποίου γνωρίζουμε την παραγοντοποίηση σε πρώτους αριθμούς. Για παράδειγμα, χωρίς να χρειαστεί να γράψουμε όλους τους

*Euler, *Opera Omnia*, Σειρά I, Τομ. 5, σσ. 193-195.

διαιρέτες του 4800, βρίσκουμε ότι

$$\sigma(4800) = \sigma(2^6 \times 3 \times 5^2) = \sigma(2^6) \times \sigma(3) \times \sigma(5^2) = 127 \times 4 \times 31 = 15.748.$$

Εφοδιασμένος με αυτά τα στοιχειώδη αλλά ισχυρά όπλα, ο Euler επανήλθε στο θεώρημα του Ευκλείδη για τους τέλειους αριθμούς. Έδειξε ότι η ικανή συνθήκη του Ευκλείδη, όταν περιοριστεί στους *άρτιους* τέλειους αριθμούς, είναι επίσης αναγκαία. Η απόδειξή του έχει ως εξής:

Θεώρημα. *Αν N είναι άρτιος τέλειος αριθμός, τότε $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, όπου ο $2^k - 1$ είναι πρώτος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο N είναι άρτιος και τέλειος. Βγάζουμε ως παράγοντες όλες τις δυνάμεις του 2, οπότε έχουμε ότι $N = 2^{k-1}b$ όπου ο b είναι περιττός. Παρατηρούμε ότι $k > 1$, διότι ο N είναι άρτιος και συνεπώς έχει τουλάχιστον ένα 2 στην παραγοντοποίησή του. Δεδομένου ότι ο N είναι επίσης τέλειος, γνωρίζουμε ότι

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^{k-1}b) = 2^k b.$$

Ταυτόχρονα, επειδή οι 2^{k-1} και b είναι σχετικά πρώτοι, οι #3 και #5 εγγυώνται ότι

$$\sigma(N) = \sigma(2^{k-1}b) = \sigma(2^{k-1})\sigma(b) = (2^k - 1)\sigma(b).$$

Εξισώνοντας αυτές τις εκφράσεις για το $\sigma(N)$ έχουμε ότι $2^k b = (2^k - 1)\sigma(b)$ ή απλά

$$\frac{2^k}{2^k - 1} = \frac{\sigma(b)}{\sigma}.$$

Όπως παρατήρησε ο Euler, το κλάσμα στα αριστερά είναι ανάγωγο, διότι ο αριθμητής του υπερβαίνει τον παρονομαστή κατά 1. Το αν το κλάσμα στα δεξιά είναι επίσης ανάγωγο δεν είναι αμέσως προφανές. Το καλύτερο που μπορούσε να πει ο Euler ήταν ότι, για κάποιο $c \geq 1$,

$$\sigma(b) = c2^k \tag{1.1}$$

και

$$b = c(2^k - 1). \tag{1.2}$$

Κατόπιν, εξέτασε δύο περιπτώσεις όσον αφορά την τιμή του c.

Περίπτωση 1. Έστω ότι $c > 1$.

Βάσει της (1.2), καθένας από τους ακέραιους αριθμούς $1, b, c$ και $2^k - 1$ είναι διαιρέτης του b. Θα δείξουμε κάτι πιο ισχυρό: ότι αυτοί οι τέσσερεις αριθμοί είναι *διαφορετικοί* διαιρέτες του b. Για να το τεκμηριώσουμε, θα δείξουμε ότι είναι αδύνατο να υπάρχει ισότητα ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο από αυτούς:

(α) $1 \neq b$, διότι διαφορετικά $N = 2^{k-1}b = 2^{k-1}$, πράγμα αδύνατο διότι μια δύναμη του 2 δεν μπορεί να είναι τέλειος αριθμός (βλ. #3 παραπάνω).

(β) $1 \neq c$, διότι στην Περίπτωση 1 θεωρούμε ότι $c > 1$.

(γ) $1 \neq 2^k - 1$, διότι διαφορετικά $2^k = 2$ και άρα $N = 2^{k-1}b = b$. Αυτό θα σήμαινε ότι ο N είναι περιττός αριθμός, το οποίο αντιβαίνει προς την υπόθεση του θεωρήματος.

(δ) $b \neq c$, διότι αν αυτά ήταν ίσα, τότε με βάση την (1.2), $b = c(2^k - 1) = b(2^k - 1)$ και άρα $1 = 2^k - 1$, οπότε επιστρέφουμε στο ενδεχόμενο (γ), το οποίο έχει ήδη απορριφθεί.

(ε) $b \neq 2^k - 1$, διότι διαφορετικά σύμφωνα με την (1.2), $b = c(2^k - 1) = cb$, πράγμα που σημαίνει ότι $c = 1$, το οποίο και πάλι αντιβαίνει προς την προϋπόθεση της Περίπτωσης 1.

(στ) Τέλος, αν $c = 2^k - 1$, τότε σύμφωνα με την (1.2) $b = c(2^k - 1) = c^2$, και άρα το b έχει τουλάχιστον τρεις διαιρέτες: $1, c$ και c^2, όλους διαφορετικούς διότι $c > 1$. Συνεπώς, το $\sigma(b)$ –το άθροισμα *όλων* των διαιρετών του b– θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $1 + c + c^2$. Από την άλλη πλευρά, με βάση την (1.1), $\sigma(b) = c2^k = c[(2^k - 1) + 1] = c[c + 1] = c^2 + c$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $c^2 + c = \sigma(b) \geq 1 + c + c^2$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $c \neq 2^k - 1$.

Ενοποιώντας τα συμπεράσματα των (α)-(στ), βλέπουμε ότι, όπως ισχυριστήκαμε, οι αριθμοί $1, b, c$ και $2^k - 1$ είναι τέσσερεις διαφορετικοί διαιρέτες του b. Επομένως, καθένας τους εμφανίζεται ως ξεχωριστός προσθετέος στο $\sigma(b)$, και συνεπώς

$$\sigma(b) \geq 1 + b + c + (2^k - 1) = b + c + 2^k = c(2^k - 1) + c + 2^k \qquad \text{από την (1.2)}$$

$$= 2^k(c + 1) > c2^k = \sigma(b). \qquad \text{από την (1.1)}$$

Από το άτοπο $\sigma(b) > \sigma(b)$ προκύπτει τελεσίδικα ότι η Περίπτωση 1 είναι *αδύνατη*. Απομένει λοιπόν η εξής μόνη εναλλακτική:

Περίπτωση 2. $c = 1$

Επομένως, από την (1.2) γνωρίζουμε ότι $b = c(2^k - 1) = 2^k - 1$ και από την (1.1) έχουμε ότι

$$\sigma(b) = c2^k = 2^k = (2^k - 1) + 1 = b + 1.$$

Αφού $\sigma(b) = b + 1$, συμπεραίνουμε (από το #1 παραπάνω) ότι το b είναι πρώτος αριθμός.

Εν ολίγοις, έχουμε αποδείξει στην Περίπτωση 2 (τη μόνη δυνατότητα που έχει απομείνει) ότι αν ο N είναι άρτιος τέλειος αριθμός, τότε $N = 2^{k-1}b = 2^{k-1}(2^k - 1)$, όπου το $2^k - 1$ είναι πρώτος αριθμός. Συνεπώς, το αναγκαίο της συνθήκης του Ευκλείδη έχει αποδειχθεί. *(ό.έ.δ.)*

Το σκεπτικό, αν και απαιτεί προσοχή στη διερεύνηση των περιπτώσεων, είναι στοιχειώδες. Ασφαλώς δεν απαιτείται εκτενής γνώση της θεωρίας αριθμών. Το ευφυές από την πλευρά του Euler ήταν ότι αναδιατύπωσε το πρόβλημα με βάση το $\sigma(n)$ – εστιάζοντας έτσι όχι στο άθροισμα των *γνήσιων* διαιρετών αλλά στο άθροισμα όλων των διαιρετών. Αν και φαίνεται απλό, ωστόσο ήταν καθοριστικό. Καλό θα ήταν να θυμόμαστε την παρατήρηση του Truesdell ότι «Η απλότητα δεν έρχεται μόνη της αλλά πρέπει να δημιουργείται».[*] Υπό αυτή την έννοια, ο Euler ήταν μαιτρ της απλοποίησης.

Με την απόδειξή του για τους άρτιους τέλειους αριθμούς, ο Euler ολοκλήρωσε αυτό που είχε ξεκινήσει ο Ευκλείδης τόσους αιώνες πριν. Το κοινό τους αποτέλεσμα –μια συνεργασία που εκτείνεται σε δύο χιλιετίες– θα ήταν δίκαιο να ονομάζεται «θεώρημα Ευκλείδη-Euler». Σίγουρα, η ονομασία αυτή, εκτός της αλφαβητικής της γοητείας [Euclid-Euler], συνδέει επίσης δύο από τα μεγαλύτερα ονόματα της ιστορίας των μαθηματικών. Είναι σαν να είχαν γράψει μαζί ένα έργο ο Σοφοκλής και ο Σαίξπηρ ή σαν να είχαν σμιλέψει μαζί ένα άγαλμα ο Φειδίας και ο Μιχαήλ Άγγελος.

Φυσικά, κανένα βιβλίο δεν περιέχει ένα τέτοιο έργο, και σε κανένα μουσείο δεν υπάρχει ένα τέτοιο άγαλμα. Αλλά το θεώρημα Ευκλείδη-Euler *υπάρχει*, ένα αιώνιο μνημείο στους δύο ιδιοφυείς δημιουργούς του. Σε ολόκληρη την ιστορία των μαθηματικών, δεν υπάρχει τίποτα παρόμοιο.

Επίλογος

Παρόλα όσα ανακάλυψαν οι Ευκλείδης και Euler σχετικά με τους τέλειους αριθμούς, εξακολουθούν να υπάρχουν κενά στην κατανόησή μας. Για παράδειγμα, κανείς δεν γνωρίζει ακόμα αν υπάρχουν άπειροι τέτοιοι αριθμοί. Σύμφωνα με τη συνταγή του Ευκλείδη, το απειράριθμο των τέλειων αριθμών θα προέκυπτε άμεσα από το απειράριθμο των πρώτων αριθμών Mersenne, αλλά το τελευταίο αυτό πρόβλημα έχει παραμείνει και το ίδιο ανεπίλυτο. Η αφθονία των τέλειων αριθμών είναι ένα ανοιχτό ερώτημα.

---

[*] John Fauvel & Jeremy Gray, επιμ., *The History of Mathematics: A Reader*, Macmillan, Λονδίνο, 1987, σ. 461.

Στον επίλογο αυτό, θα επικεντρωθούμε σε ένα διαφορετικό, αλλά εξίσου συναρπαστικό, μυστήριο. Πιθανόν ο αναγνώστης να έχει παρατηρήσει ότι όλοι οι τέλειοι αριθμοί που έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής (π.χ., $6, 28, 496, 8128$) είναι άρτιοι. Πού είναι λοιπόν οι *περιττοί*;

Για αρχή, υπολογίζουμε το $\sigma(n)$ για κάποιους μικρούς περιττούς αριθμούς:

$$\begin{array}{llll}
\sigma(3)=4 & \sigma(11)=12 & \sigma(19)=20 & \sigma(27)=40 \\
\sigma(5)=6 & \sigma(13)=14 & \sigma(21)=32 & \sigma(29)=30 \\
\sigma(7)=8 & \sigma(15)=24 & \sigma(23)=24 & \sigma(31)=32 \\
\sigma(9)=13 & \sigma(17)=18 & \sigma(25)=31 & \sigma(33)=48
\end{array}$$

Παρατηρήστε ότι σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε $\sigma(N) < 2N$. Αυτοί οι περιττοί αριθμοί υπολείπονται της τελειότητας.

Σε διαισθητικό επίπεδο, το φαινόμενο αυτό είναι εύλογο. Αντίθετα απ' ό,τι συμβαίνει με έναν άρτιο αριθμό, όπου ο ένας από τους γνήσιους διαιρέτες του είναι ήδη το *μισό* του αριθμού, ένας περιττός αριθμός δεν δέχεται ποτέ μια τόσο μεγάλη ώθηση. Δηλαδή, ενώ το 496 διαιρείται με το $496/2 = 248$, ο μεγαλύτερος γνήσιος διαιρέτης του 497 είναι το σχετικά καχεκτικό 71. Για να είναι το 496 τέλειος αριθμός, αρκεί όλοι οι άλλοι γνήσιοι διαιρέτες του να καλύψουν το έλλειμμα $496 - 248 = 248$ – το οποίο, βέβαια, όντως καλύπτουν, αφού $496 = 2^4(2^5 - 1)$. Αλλά για να φτάσει στην τελειότητα το 497, θα πρέπει οι υπόλοιποι γνήσιοι διαιρέτες του να συνεισφέρουν μια ποσότητα $497 - 71 = 426$, την οποία δεν προσεγγίζουν καν. Οι περιττοί αριθμοί φαίνονται να υστερούν απελπιστικά.*

Μετά από μερικές σελίδες παραδειγμάτων, ο εξαντλημένος εξερευνητής των αριθμών πιθανόν να εικάσει εύλογα ότι αν το N είναι περιττό τότε το $\sigma(N)$ είναι *πάντοτε* λιγότερο από $2N$. Αυτό ισχύει όντως για κάθε περιττό αριθμό μέχρι και το 943, για το οποίο $\sigma(943) = 1008 < 2 \times 943$. Αν αυτό το φαινόμενο συνεχιζόταν επ' άπειρον, δεν θα ήταν δυνατόν να υπάρχουν περιττοί τέλειοι αριθμοί.

Κατόπιν, όμως, εμφανίζεται μία από αυτές τις υπέροχες εκπλήξεις που κατά ευτυχή τρόπο συμβαίνουν συχνά στα μαθηματικά: $\sigma(945) = 1920 > 2 \times 945$. Έχουμε έναν περιττό αριθμό για τον οποίο το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών υπερβαίνει τον ίδιο τον αριθμό. Το παράδειγμα αυτό καταρρίπτει την εικασία μας. Επιπλέον, αν το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών ενός περιττού αριθμού μπορεί να πέφτει κάτω ή πάνω από τον αριθμό, δεν υπάρχει κανένας προφανής λόγος να μην μπορεί να συμπέσει ακριβώς με τον αριθμό. Οι περιττοί τέλειοι αριθμοί μπαίνουν ξανά στην κούρσα.

---

*Για το ζήτημα αυτό, βλ. Dan Kalman, «A Perfectly Odd Encounter in a Reno Cafe», *Math Horizons*, Απρίλιος 1996, σσ. 5-7.

Ο ίδιος ο Euler αναφέρθηκε σε αυτό το ζήτημα στο άρθρο του 1747 και παραδέχτηκε την αμηχανία του. «Το αν … υπάρχουν περιττοί τέλειοι αριθμοί», παρατήρησε σε ένα προφητικό απόσπασμα, «είναι ένα δυσκολότατο (*difficillima*) ερώτημα».[*]

Όταν ο *Euler* χαρακτηρίζει ένα πρόβλημα «δυσκολότατο», μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι όντως είναι. Μέχρι και σήμερα, το ζήτημα της ύπαρξης περιττών τέλειων αριθμών παραμένει αδιευκρίνιστο. Παρά τις ηρωικές προσπάθειες των μαθηματικών και των υπολογιστών τους –των καλύτερων εκπροσώπων από τους κόσμους του άνθρακα και του πυριτίου– δεν έχει εμφανιστεί κανένας περιττός τέλειος αριθμός. Εντούτοις, κανείς δεν έχει αποδείξει ότι τέτοιου είδους αριθμοί είναι κάτι το αδύνατο. Ο μαθηματικός Richard Guy το έχει θέσει σωστά: η ύπαρξη περιττών τέλειων αριθμών αποτελεί «ένα από τα πιο διαβόητα άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών».[†]

Αυτό δεν σημαίνει πως δεν έχει υπάρξει πρόοδος στο ερώτημα: οι μαθηματικοί έχουν εντοπίσει πολλές ιδιότητες που θα πρέπει να διαθέτει ένας περιττός αριθμός προκειμένου να είναι τέλειος. Εν προκειμένω, ας δούμε την παρακάτω σύντομη αλλά έξυπνη απόδειξη του J. J. Sylvester (1814–1897) που χρονολογείται από το 1888.[‡]

Θεώρημα. *Ένας περιττός τέλειος αριθμός θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις* διαφορετικούς *πρώτους παράγοντες.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο N είναι περιττός τέλειος αριθμός με έναν μόνο πρώτο παράγοντα – με άλλα λόγια, $N = p^r$ όπου p ένας περιττός πρώτος και $r \geq 1$. Τότε $2N = \sigma(N)$, και άρα

$$2p^r = \sigma(p^r) = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$$

με βάση το #3 παραπάνω. Συνεπώς, $2p^r - p^{r+1} = 1$, που είναι άτοπο διότι ο πρώτος p διαιρεί ακριβώς το αριστερό μέλος της ισότητας αλλά όχι το δεξιό μέλος. Συνεπώς, ένας περιττός τέλειος αριθμός δεν μπορεί να έχει έναν μόνο πρώτο παράγοντα.

Μήπως είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο πρώτους παράγοντες; Έστω ότι ο $N = p^k q^r$ είναι περιττός και τέλειος, όπου $p < q$ είναι περιττοί πρώτοι. Από το #5 γνωρίζουμε ότι

$$2N = \sigma(N) = \sigma(p^k q^r) = \sigma(p^k)\sigma(q^r).$$

[*] Euler, *Opera Omnia*, Σειρά I, Τομ. 5, σ. 355.

[†] Richard Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, Νέα Υόρκη, 1981, σ. 25.

[‡] J. J. Sylvester, *Mathematical Papers*, Τόμ. 4, Τσέλση, Νέα Υόρκη, 1973 (ανατύπωση), σσ. 589-590.

Με άλλα λόγια,

$$2N = (1 + p + p^2 + \cdots + p^k) \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^r).$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη αυτής της έκφρασης με $N = p^k q^r$ και απλοποιούμε:

$$\begin{aligned} 2 \;&=\; \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^r}\right) \\ &\leq\; \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^r}\right) \end{aligned}$$

διότι ο p, όντας περιττός πρώτος, θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 3, και ο q, όντας μεγαλύτερος περιττός πρώτος, θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 5. Αντικαθιστώντας αυτές τις πεπερασμένες γεωμετρικές σειρές με τις (μεγαλύτερες) άπειρες αντίστοιχές τους και αθροίζοντας τις τελευταίες έχουμε ότι:

$$2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^j} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \qquad \text{όπερ άτοπον.}$$

Άρα, ένας περιττός τέλειος αριθμός, αν υπάρχει, θα πρέπει να έχει τρεις ή περισσότερους πρώτους παράγοντες. *(ό.έ.δ.)*

Κατόπιν, ο Sylvester απέδειξε ότι ένας περιττός τέλειος αριθμός θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερεις, και έπειτα τουλάχιστον πέντε διαφορετικούς πρώτους παράγοντες.* Αυτού του είδους τα θεωρήματα έχουν δύο πλεονεκτήματα. Πρώτον, περιορίζουν το πεδίο της έρευνας. Ένας μαθηματικός που «κυνηγάει» έναν περιττό τέλειο αριθμό –λαμβάνοντας υπ' όψη την εργασία του Sylvester– δεν χρειάζεται να χάνει χρόνο με έναν αριθμό όπως ο 227.529, του οποίου η παραγοντοποίηση $3^4 \times 53^2$ περιλαμβάνει μόνο δύο διαφορετικούς πρώτους. Ο αριθμός αυτός απορρίπτεται αυτομάτως.

Το πιο ενδιαφέρον, όμως, είναι ότι θεωρήματα όπως αυτό του Sylvester θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μια απόδειξη μη ύπαρξης. Διότι ας υποθέσουμε ότι κάποιος αποδεικνύει πως οι περιττοί τέλειοι αριθμοί θα πρέπει να ικανοποιούν δύο συνθήκες που είναι αμοιβαία ασύμβατες – για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ξέρουμε πως οι περιττοί τέλειοι αριθμοί *θα πρέπει* να διαιρούνται με το 9 αλλά είναι *αδύνατο* να διαιρούνται με το 3. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι δεν υπάρχουν περιττοί τέλειοι αριθμοί.

Δυστυχώς, μέχρι στιγμής κανείς δεν έχει εντοπίσει κάποια ασυμβατότητα ανάμεσα στις γνωστές ιδιότητες των περιττών τέλειων αριθμών, παρ' όλο

*Όπ. π., σ. 604 και σσ. 611-615.

που έχουν αποδειχθεί αρκετές τέτοιες ιδιότητες, όπως παραδείγματος χάριν οι εξής:*

1. Ένας περιττός τέλειος αριθμός δεν μπορεί να διαιρείται με το 105.
2. Ένας περιττός τέλειος αριθμός θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 8 διαφορετικούς πρώτους παράγοντες (μια επέκταση της εργασίας του Sylvester).
3. Ο μικρότερος περιττός τέλειος αριθμός θα πρέπει να υπερβαίνει το 10^{300}.
4. Ο δεύτερος μεγαλύτερος πρώτος παράγοντας ενός περιττού τέλειου αριθμού υπερβαίνει το 1000.
5. Το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των περιττών τέλειων αριθμών είναι πεπερασμένο. Σε συμβολική μορφή,

$$\sum_{\text{περιττός τέλειος}} \frac{1}{n} < \infty.$$

Οι συνθήκες αυτές έχουν μια αλλόκοτη χάρη, διότι καθορίζουν συγκεκριμένες ιδιότητες πραγμάτων που μπορεί να μην υπάρχουν. Αν δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα αν υπάρχει *οποιοσδήποτε* περιττός τέλειος αριθμός, τι νόημα έχει μια πληροφορία σχετικά με τον δεύτερο μεγαλύτερο πρώτο παράγοντά του; Μοιάζει κάπως σαν να προσπαθούμε να βρούμε το πατρώνυμο της Νεράιδας των Δοντιών.

Η ιδιότητα 5, παρότι εξίσου ατελέσφορη με τις υπόλοιπες, έχει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των ακέραιων αριθμών –η λεγόμενη αρμονική σειρά– είναι άπειρο. Το ίδιο και το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των άρτιων αριθμών, ή όλων των περιττών αριθμών, ή ακόμα και όλων των πρώτων (βλ. Κεφάλαιο 4). Αυτού του είδους οι αριθμοί είναι αρκετά άφθονοι ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους να αποκλίνει στο άπειρο.

Αντιθέτως, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των τέλειων τετραγώνων είναι πεπερασμένο. Τα τέλεια τετράγωνα είναι τόσο αραιά διασκορπισμένα μεταξύ των ακεραίων που το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι σχετικά μικρό. Υπό αυτή την έννοια, η Ιδιότητα 5 μας λέει ότι οι περιττοί τέλειοι αριθμοί μοιάζουν περισσότερο με τα τετράγωνα, δηλαδή είναι αρκετά σπάνιοι. Βέβαια, δεδομένου ότι δεν υπάρχει *κανένας* τέτοιος αριθμός κάτω από το 10^{300} –έναν αριθμό αρκετά μεγάλο για να φέρει πονοκέφαλο σε έναν υπερυπολογιστή– αυτό δεν είναι κανένα σπουδαίο νέο.

*Klee & Wagon, σσ. 212-213.

Ο Sylvester, επισκοπώντας την πληθώρα ιδιοτήτων που θα πρέπει να ισχύουν για έναν περιττό τέλειο αριθμό, θεώρησε ότι τα τεκμήρια ήταν σχεδόν αμάχητα. Το 1888, έγραψε:

> … μετά από μακρά σκέψη πάνω στο ζήτημα, έχω πειστεί ότι η ύπαρξη οποιουδήποτε τέτοιου αριθμού –η διαφυγή του, ούτως ειπείν, από τον περίπλοκο ιστό συνθηκών που τον εγκλωβίζουν από παντού– θα ήταν κάτι σαν θαύμα.*

Ωστόσο, θαύματα συμβαίνουν. Παρά τη δικαιολογημένη δυσπιστία, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε λογικά την ύπαρξη ενός περιττού τέλειου αριθμού. Ο Eric Temple Bell, αριθμοθεωρητικός και γνωστός συγγραφέας βιβλίων σχετικά με τα μαθηματικά, κάποτε διαμαρτυρήθηκε: «Το να πούμε πως η θεωρία αριθμών είναι κυρία της επικράτειάς της όταν δεν μπορεί να καθυποτάξει κάτι παιδαριώδες όπως [οι περιττοί τέλειοι αριθμοί] είναι αδικαιολόγητη κολακεία». Πράγματι, η θεωρία αριθμών, την οποία ο Bell έχει αποκαλέσει «την τελευταία μεγάλη απολίτιστη ήπειρο των μαθηματικών», είναι μια διαρκής πηγή ταπεινότητας.†

Για να μην αποθαρρυνόμαστε, μπορούμε πάντα να φαντασιωνόμαστε το «τέλειο» τέλος αυτής της ιστορίας. Ίσως το θέμα της ύπαρξης περιττών τέλειων αριθμών να διαλευκανθεί τελικά από κάποια ιδιοφυή νεαρή μαθηματικό ονόματι Eunice Eubanks. Σε αυτή την περίπτωση, θα μπορούσαμε να βαφτίσουμε την πιο ευτυχή αλφαβητικά πρόταση σε όλα τα μαθηματικά: το θεώρημα των Ευκλείδη-Euler-Eubanks.

Μέχρι την ευτυχή εκείνη μέρα, θα πρέπει να αρκεστούμε στα τελεσίδικα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Με ένα χρονικό χάσμα πολλών αιώνων, οι Ευκλείδης και Euler τεκμηρίωσαν την ακριβή φύση των *άρτιων* τέλειων αριθμών. Ήταν, κυριολεκτικά, μια συνεργασία που έμεινε στην ιστορία.

---

*Sylvester, σ. 590.

†E. T. Bell, *The Queen of the Sciences*, Williams and Wilkins, Βαλτιμόρη, 1931, σ. 91.