Πρόλογος

Στην κρύπτη κάτω από τον Καθεδρικό Ναό του Αγίου Παύλου βρίσκεται ο τάφος του Christopher Wren, αρχιτέκτονα αυτού του σπουδαίου και όμορφου οικοδομήματος. Η επιγραφή που φέρει συγκαταλέγεται ανάμεσα στα πιο γνωστά επιτύμβια:

Lector, si monumentum requiris, circumspice.

Η μετάφραση αυτής της πρότασης είναι «Επισκέπτη, αν ψάχνεις το μνημείο του, κοίταξε γύρω σου». Πράγματι, ένας αρχιτέκτονας δεν θα μπορούσε να έχει πιο περίτεχνο μνημείο από τον τεράστιο ναό που υψώνεται από πάνω. Από το κλίτος μέχρι τον θόλο και το χοροστάσιο, ο Άγιος Παύλος είναι το αριστούργημα του Wren.

Τα μαθηματικά δεν έχουν την απτή στερεότητα της αρχιτεκτονικής. Είναι κάτι αφηρημένο, που δεν υφίσταται στην πέτρα και τη λάσπη αλλά στην ανθρώπινη φαντασία. Ωστόσο, όπως και η αρχιτεκτονική, έχουν πραγματική ύπαρξη. Και, όπως η αρχιτεκτονική, έχουν τους δικούς τους δασκάλους.

Το βιβλίο αυτό είναι αφιερωμένο σε μια από τις αδιαμφισβήτητες ιδιοφυΐες των μαθηματικών, τον Leonhard Euler. Η διορατικότητά του ήταν εκθαμβωτική, η οξύνοιά του βαθιά, η επιρροή του τόσο σημαντική όσο κάθε άλλης ιστορικής προσωπικότητας. Ο Euler συνεισέφερε σε εδραιωμένους κλάδους των μαθηματικών όπως η θεωρία αριθμών, η ανάλυση, η άλγεβρα και η γεωμετρία. Εξερεύνησε επίσης την εν πολλοίς αχαρτογράφητη επικράτεια της αναλυτικής θεωρίας αριθμών, της θεωρίας γράφων και της διαφορικής γεωμετρίας. Επιπλέον, ήταν ο επιφανέστερος *εφαρμοσμένος* μαθηματικός του αιώνα του, όπως μαρτυρά σαφώς το έργο του στη μηχανική, την οπτική και την ακουστική. Δεν υπήρξε σχεδόν καμία πτυχή των μαθηματικών που να διέφυγε της διεισδυτικής ματιάς του Euler. Όπως το έχει θέσει ο μαθηματικός του εικοστού αιώνα André Weil, «Σε όλη του τη ζωή … φαινόταν να κατέχει στη διάνοιά του το σύνολο των μαθηματικών της εποχής του, τόσο των θεωρητικών όσο και των εφαρμοσμένων».[*]

[*] André Weil, *Number Theory: An Approach through History*, Birkhauser, Βοστώνη, 1984, σ. 284.

Αν η ποιότητα των επιτευγμάτων του ήταν εκπληκτική, το ίδιο ισχύει και για την ποσότητά τους. Αυτή τη στιγμή, έχουν εκδοθεί 73 τόμοι των «Απάντων» του (*Opera Omnia*) –ένα εκδοτικό πρόγραμμα που ξεκίνησε το 1911– ενώ αναμένονται πολλοί τόμοι επιστημονικής αλληλογραφίας και άλλων χειρογράφων του. [Σ.τ.Μ.: Το 2021 είχαν εκδοθεί 87 τόμοι των *Opera Omnia*.] Ο Euler ήταν ένας πραγματικός χείμαρρος, ένας άνθρωπος που έγραφε μαθηματικά πιο γρήγορα απ' ό,τι οι περισσότεροι μπορούν να τα αφομοιώσουν.

Όσον αφορά την εξηγητική ικανότητα, δεν υπάρχει κανείς που να συγκρίνεται με αυτόν. Συνέθεσε κλασικά κείμενα στην άλγεβρα, στον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό και στον λογισμό των μεταβολών – έργα που συνεχίζουν να διαμορφώνουν τη φύση των γνωστικών αυτών αντικειμένων μέχρι και σήμερα. Επιπλέον, το γράψιμό του ήταν ζωηρό και ενθουσιώδες, σε αντίθεση με την τάση των σύγχρονων συγγραφέων να αποκρύπτουν το πάθος τους πίσω από ένα προσωπείο απόμακρης, τεχνικής πρόζας. Είναι φανερό πως ο Euler το απολάμβανε, συμμετέχοντας στο παιχνίδι για τη δική του ευχαρίστηση και αποπνέοντας μια γενικότερη σιγουριά πως η αναζήτησή του θα έδινε καρπούς.

Μπροστά σε μια τέτοια παραγωγικότητα, νιώθει κανείς δικαιολογημένα ταπεινός. Για να είμαστε ειλικρινείς, νιώθει δικαιολογημένα *εκμηδενισμένος*. Κανένας συγγραφέας δεν μπορεί να αντιμετωπίσει τις δεκάδες χιλιάδες σελίδες που έγραψε ο Euler στις έξι δεκαετίες που διήρκεσε η καριέρα του, και είναι δύσκολο να μην αισθάνεται κανείς αφ' ενός ανεπαρκής και αφ' ετέρου ανασφαλής ακόμα και για να διανοηθεί ένα τέτοιο εγχείρημα.

Εντούτοις, τα επιτεύγματά του αξίζουν να μελετηθούν. Αν και πάρα πολλοί μαθηματικοί σέβονται το όνομα του Euler, είναι σχετικά λίγοι εκείνοι που έχουν ανοίξει έναν τόμο των «Απάντων» του και έχουν βυθιστεί σε ένα κείμενό του. Αντιθέτως, οι σύγχρονοι μαθηματικοί συνηθίζουν να μαθαίνουν το αντικείμενο από διδακτικά συγγράμματα αντί από τις πρωτότυπες πηγές. Λόγω των αλλαγών που επέρχονται με την πάροδο του χρόνου στον συμβολισμό και την έμφαση, για να μην αναφέρουμε τις πραγματικές εξελίξεις που μπορούν να καταστήσουν μια παλαιότερη πραγμάτευση παρωχημένη, αυτή η πρακτική δεν είναι εγγενώς λανθασμένη.

Ωστόσο, αν ασχολούμαστε μόνο με υποκατάστατα, με διαμεσολαβημένες παρουσιάσεις, κάτι χάνουμε. Τα αυθεντικά μαθηματικά, ακόμα κι αν έχουν ηλικία αιώνων, μπορούν να είναι εξίσου διεγερτικά με τα θεωρήματα που αποδείχθηκαν την προηγούμενη εβδομάδα. Αυτό ισχύει κατ' εξοχήν για το έργο του Euler, όπως έχει παρατηρήσει τόσο πειστικά ο Raymond Ayoub γράφοντας:

> Η μελέτη των άρθρων του είναι μια απολαυστική εμπειρία· ο αναγνώστης εντυπωσιάζεται βαθιά από την εξαιρετική φαντασία και πρωτοτυπία. Μερικές φορές, ένα αποτέλεσμα γνωστό αποκτά μια

> πρωτότυπη και διαφωτιστική διάσταση, και εύχεται κανείς να μην είχε αλλοιωθεί από τους μεταγενέστερους συγγραφείς.*

Κανένας μελετητής της λογοτεχνίας δεν θα ήταν ικανοποιημένος με μια απλή σύνοψη του *Άμλετ*. Αντίστοιχα, κανένας μαθηματικός δεν θα πρέπει να περάσει όλη του την καριέρα χωρίς να συναντήσει τον Euler πρόσωπο με πρόσωπο. Μια τέτοια αμέλεια θα υποδήλωνε όχι μόνο αδιαφορία για το παρελθόν αλλά επίσης, υπό κάποια θεμελιώδη έννοια, καθαρό εγωισμό.

Οι βασικοί μου κανόνες για αυτό το βιβλίο είναι απλοί: το κάθε κεφάλαιο είναι επικεντρωμένο σε ένα αντικείμενο στο οποίο ο Euler είχε κάποια σημαντική συνεισφορά. Τα κεφάλαια ξεκινούν με μια επισκόπηση των όσων ήταν γνωστά πριν από τον Euler· αυτό μας δίνει την ευκαιρία να παρουσιάσουμε κάποιους προκατόχους του όπως ο Ευκλείδης, ο Ήρων, ο Briggs και ο Bernoulli – γίγαντες στων οποίων τους ώμους έμελλε να σταθεί ο Euler. Στη συνέχεια, εξετάζουμε ένα «σπουδαίο θεώρημα» του Euler με το οποίο προεξέτεινε τα όρια όπως μόνο εκείνος θα μπορούσε. Σε αυτή την παρουσίαση, υπόσχομαι να είμαι όσο το δυνατόν πιο πιστός στην εξήγηση της αυθεντικής του προσέγγισης. Το κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με έναν επίλογο, όπου είτε εξετάζεται η μετέπειτα εργασία του Euler πάνω στο συγκεκριμένο θέμα είτε περιγράφεται η περαιτέρω εξέλιξη των ιδεών του από τους μεταγενέστερους μαθηματικούς.

Κατά συνέπεια, το βιβλίο αυτό έχει τον χαρακτήρα μιας περιπλάνησης στη θεωρία αριθμών, την ανάλυση, τις μιγαδικές μεταβλητές, την άλγεβρα, τη γεωμετρία και τη συνδυαστική – που είναι λίγες από τις περιοχές στις οποίες είχε επίδραση ο Euler. Οι επιλογές των θεωρημάτων –στην πραγματικότητα, οι επιλογές των ίδιων των γνωστικών περιοχών– είναι δικές μου. Επιπλέον, επειδή ο Euler ήταν μαιτρ στο να επινοεί πολλαπλές αποδείξεις του ίδιου αποτελέσματος, είναι κανείς υποχρεωμένος να επιλέξει ανάμεσα σε εξίσου συναρπαστικές διαδρομές προς τον ίδιο προορισμό. Πενήντα διαφορετικοί συγγραφείς που θα ακολουθούσαν τους ίδιους βασικούς κανόνες θα έγραφαν πενήντα διαφορετικά βιβλία (και θα με ενδιέφερε να διαβάσω τα άλλα σαράντα εννιά). Αλλά αυτό το βιβλίο είναι δικό μου.

Ποιο είναι το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο για τα κεφάλαια που ακολουθούν; Από τη μία πλευρά, ο τόμος αυτός δεν απευθύνεται στον αρχάριο. Οι αναγνώστες θα πρέπει να γνωρίζουν έννοιες όπως «ολοκλήρωση κατά παράγοντες» ή «πρώτοι αριθμοί» ή «γεωμετρική σειρά». Υποθέτω ότι η παρακολούθηση κάποιων μαθημάτων των πρώτων ετών του πανεπιστημίου θα αρκούσε σίγουρα για όλα όσα θα συναντήσουμε.

---

*Raymond Ayoub, «Euler and the Zeta Function», *The American Mathematical Monthly*, Τόμ. 81, Αρ. 10, 1974, σ. 1069.

Από την άλλη πλευρά, το βιβλίο σίγουρα δεν προϋποθέτει καμία ειδημοσύνη μεταπτυχιακού επιπέδου σε οποιονδήποτε κλάδο των μαθηματικών. Υπό μια πολύ ουσιαστική έννοια, αυτό θα υπονόμευε καίρια τον στόχο μου. Ελπίζω ότι έχω κάνει την ύλη προσιτή στο ευρύτερο δυνατό κοινό των «μαθηματικά καταρτισμένων» αναγνωστών, δηλαδή ότι το έργο αυτό είναι, με την καλύτερη έννοια του όρου, *επεξηγηματικό*.

Πριν ξεκινήσουμε, θα ήθελα να κάνω αφ' ενός μια παρατήρηση και αφ' ετέρου μια παράκληση.

Η παρατήρηση είναι ότι ο Euler δεν ήταν σε καμία περίπτωση αλάνθαστος. Έζησε και εργάστηκε σε μια εποχή όπου τα πρότυπα της μαθηματικής αυστηρότητας ήταν πολύ πιο απλοϊκά απ' ό,τι είναι σήμερα. Όπως θα δούμε, ορισμένα από τα επιχειρήματά του ήταν αμφισβητήσιμα, ενώ άλλα ήταν απλώς λάθος. Εξάλλου, ο Euler ήταν εκείνος που, χωρίς κανένα δισταγμό, εισήγαγε εκφράσεις όπως

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = 0{,}66215 + \frac{1}{2}\ln(\infty)^{*}$$

ή

$$\frac{1 - x^0}{0} = -\ln x.^{\dagger}$$

Αν και ο σύγχρονος αναγνώστης μπορεί να απορρίψει τα παραπάνω με ένα συγκαταβατικό χαμόγελο επίγνωσης, θα ήταν καλύτερα να μη βιαστεί να γελάσει. Δεδομένου ότι και το αριστερό και το δεξιό μέλος της πρώτης εξίσωσης είναι άπειρα, στην πραγματικότητα η εξίσωση δεν είναι λάθος (παρότι η ποσότητα $0{,}66215$ στα δεξιά φαίνεται γελοιωδώς περιττή). Και η δεύτερη εξίσωση, αν τροποποιηθεί ελαφρά και πάρει τη μορφή «$\lim_{t\to 0^+}(1 - x^t)/t = -\ln x$ για $x > 0$», είναι απόλυτα λογική. Στην προκειμένη περίπτωση, όπως συμβαίνει συχνά με τα «λάθη» του Euler, τελικά συνειδητοποιούμε ότι, αν και αυτό είναι μαθηματική τρέλα, ωστόσο έχει μια μέθοδο μέσα της.

Η παράκλησή μου είναι να με συγχωρήσουν οι αναγνώστες για την πιθανή παράλειψη του αγαπημένου τους θεωρήματος του Euler. Ομολογώ εξαρχής την ενοχή μου απέναντι σε μια τέτοια κατηγορία, καθώς έχω παραλείψει ουσιαστικά *όλο* το έργο του Euler. Το βιβλίο αυτό αντιπροσωπεύει μόνο την κορυφή του μαθηματικού παγόβουνου ή, ίσως πιο εύστοχα, του μαθηματικού παγετώνα.

Στην καλύτερη περίπτωση, ελπίζω να μοιραστώ μαζί σας τον προσωπικό μου ενθουσιασμό για ένα μικροσκοπικό θραύσμα του αξιοθαύμαστου έργου

---

[*] Euler, *Opera Omnia*, Σειρά I, Τόμ. 14, σ. 120.
[†] Όπ. π., σ. 12.

του Euler. Παρά τους αιώνες που έχουν περάσει, η συνεισφορά του παραμένει κορυφαίου επιπέδου, και ο αντίκτυπός του στα μαθηματικά είναι εμφανής παντού. Ανεξάρτητα από το πεδίο ειδίκευσής τους, οι σημερινοί μαθηματικοί μπορούν πραγματικά να πουν για τον Euler αυτό που ειπώθηκε κάποτε για τον Wren:

> «Αν ψάχνεις το μνημείο του, κοίταξε γύρω σου».