ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ελληνική γεωμετρία

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε μια μικρή εισαγωγή στη γεωμετρία, που κάποτε ήταν ο ακρογωνιαίος λίθος των μαθηματικών. Σε αυτό το κεφάλαιο και στα επόμενα δύο, θα εξετάσουμε αυτό το αρχαίο και όμορφο αντικείμενο σε μεγαλύτερο βάθος. Και προφανώς το καλύτερο σημείο για να ξεκινήσουμε αυτή τη μελέτη δεν μπορεί να είναι παρά οι κορυφαίοι γεωμέτρες όλων των εποχών, οι μαθηματικοί της κλασικής Ελλάδας.

Η ελληνική γεωμετρία συγκαταλέγεται στα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρώπινης διάνοιας για λόγους τόσο μαθηματικούς όσο και ιστορικούς, τόσο πρακτικούς όσο και αισθητικούς. Ο χρυσός αιώνας της διήρκεσε από τον Θαλή τον Μιλήσιο, που έζησε περί το 600 π.Χ., μέχρι τα έργα του Ερατοσθένη, του Απολλώνιου και του απαράμιλλου Αρχιμήδη του Συρακούσιου, τον δεύτερο αιώνα π.Χ. Από το σημείο αυτό ξεκίνησε ένας κάπως λιγότερο σημαντικός «αργυρός αιώνας», ο οποίος συνεχίστηκε μέχρι την εποχή του Πάππου, περί το 300 μ.Χ. Με το έργο των μελετητών αυτών, καθώς και πολλών άλλων, η γεωμετρία εξελίχθηκε από μια πρακτική μέθοδος μέτρησης της γης (όπως δηλώνει και η ίδια η λέξη *γεω-μετρία*) σε ένα αχανές σώμα αφηρημένων θεωρημάτων και κατασκευών συνυφασμένων μεταξύ τους μέσω των αδήριτων κανόνων της λογικής. Η ελληνική γεωμετρία συμπεριλαμβάνεται στα σπουδαιότερα πνευματικά/καλλιτεχνικά κινήματα του Δυτικού πολιτισμού, και υπό αυτή την έννοια έχει πολλά κοινά στοιχεία με το ελισαβετιανό δράμα ή τον γαλλικό ιμπρεσιονισμό. Όπως και οι ιμπρεσιονιστές, οι Έλληνες γεωμέτρες είχαν μια κοινή γενική φιλοσοφία και τεχνοτροπία, και παρότι ανάμεσά τους υπήρχαν τόσες παραλλαγές όσες και μεταξύ των Γάλλων καλλιτεχνών, τα βαθύτερα ενοποιητικά χαρακτηριστικά ενός ιμπρεσιονιστικού πίνακα ή ενός ελληνικού θεωρήματος αναγνωρίζονται αμέσως.

Ποια είναι αυτά τα χαρακτηριστικά; Ο ιστορικός Ivor Thomas, στο εκτενές του έργο *Greek Mathematical Works*, ξεχωρίζει (1) την εντυπωσιακή λογική αυστηρότητα που εφάρμοσαν οι Έλληνες στην απόδειξη θεωρημάτων, (2) την καθαρά γεωμετρική –αντί για αριθμητική– φύση των μαθηματικών τους, και (3) την οργανωτική τους δεξιοτεχνία όσον αφορά την παρουσίαση και την ανάπτυξη μαθηματικών προτάσεων.[1]

Σε αυτά τα χαρακτηριστικά, θα προσθέσουμε δύο ακόμα. Το ένα είναι το ότι αντιλήφθηκαν τη γεωμετρία ως μια ανυπέρβλητη άσκηση στην καθαρή σκέψη, ως ένα αντικείμενο ταυτόχρονα ιδανικό, άυλο και αιώνιο. Στην *Πολιτεία*, ο Πλάτωνας παρατηρεί ότι παρότι οι γεωμέτρες σχεδιάζουν απτά σχήματα ως βοηθήματα για τις διερευνήσεις τους,

> αντικείμενα του στοχασμού τους δεν είναι αυτά, τα ορατά [σχήματα], αλλά εκείνα των οποίων τούτα εδώ αποτελούν ομοιώματα, αφού οι συλλογισμοί τους αναφέρονται στο τετράγωνο αυτό καθεαυτό και στη διάμετρο αυτή καθεαυτήν κι όχι σε τούτην εδώ την οποία σχεδιάζουν [...]· αυτά τα σχήματα που τα πλάθουν και τα σχεδιάζουν –σχήματα για τα οποία υπάρχουν και σκιές και απεικονίσεις τους πάνω σε υδάτινες επιφάνειες– τα χρησιμοποιούν κι αυτά πάλι ως εικόνες που με τη βοήθειά τους επιδιώκουν να δουν ακριβώς εκείνα τα οποία δεν θα μπορούσε κανείς να τα δει με κανέναν άλλο τρόπο παρά μόνο με τον λογισμό.[2]

Μια τέτοια θεώρηση, βέβαια, ταιριάζει καλά με την πλατωνική έννοια της ιδανικής ύπαρξης πέρα από την ανθρώπινη εμπειρία, και η γεωμετρική σκέψη σίγουρα έπαιξε κάποιο ρόλο στη διαμόρφωση της φιλοσοφίας του Πλάτωνα. Οι Έλληνες στοχαστές –αναζητώντας το τέλειο, το λογικά συνεπές και το απόλυτα ορθολογικό– μπορούσαν να θεωρούν τη γεωμετρία ως την ενσάρκωση αυτού του ιδανικού.

Λιγότερο συνταρακτική, αλλά εντούτοις κεντρική σε μεγάλο μέρος των ελληνικών μαθηματικών, ήταν η προσήλωση στον κανόνα και τον διαβήτη για τις γεωμετρικές κατασκευές. Από τη μία πλευρά, τα δύο αυτά όργανα ήταν εύκολα διαθέσιμα για να σχεδιάζει κανείς τα απτά σχήματα στα οποία αναφερόταν ο Πλάτωνας. Αλλά υπό μια πιο αφηρημένη έννοια, τα συγκεκριμένα εργαλεία αντιπροσώπευαν την ευθεία γραμμή και τον κύκλο ως καθοριστικά στοιχεία της γεωμετρικής ύπαρξης. Με την αταλάντευτη ακρίβεια της ιδανικής ευθείας και την τέλεια συμμετρία του ιδανικού κύκλου, οι Έλληνες δημιούργησαν τα γεωμετρικά τους σχήματα και, ξεκινώντας από αυτά, τα γεωμετρικά τους θεωρήματα. Και παρότι σήμερα έχουμε επεκτείνει τα μαθηματικά πέρα από τους περιορισμούς των ευθειών και των κύκλων, η υπεροχή τους για τους Έλληνες μαθηματικούς ήταν απόλυτα ταιριαστή.

Αναμφίβολα, οι γεωμετρικές ιδέες είχαν προηγηθεί των Ελλήνων. Οι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας, για παράδειγμα, χρησιμοποιούσαν τη γεωμετρία για να κατατέμνουν χωράφια σε μικρότερα μέρη και για να οικοδομούν πυραμίδες, ένα ζήτημα στο οποίο θα επανέλθουμε στο Κεφάλαιο 15. Αλλά στους Έλληνες θα πρέπει να αναζητήσει κανείς τα πρώτα γεωμετρικά θεωρήματα, τις πρώτες προτάσεις οι οποίες αποδείχθηκαν με λογική αυστηρότητα.

Σύμφωνα με τις υπάρχουσες μαρτυρίες, ο πρώτος μαθηματικός της Ελλάδας, για να μην πούμε επίσης ο πρώτος της αστρονόμος και φιλόσοφος, ήταν ο Θαλής, ο οποίος γεννήθηκε και μεγάλωσε στις ανατολικές ακτές του Αιγαίου. Κατά τον μεταγενέστερο σχολιαστή Πρόκλο, «Ο Θαλής ήταν ο πρώτος που ταξίδεψε στην Αίγυπτο και έφερε στην Ελλάδα το προϊόν της εκεί μελέτης του· ανακάλυψε πολλές προτάσεις και αποκάλυψε στους διαδόχους του τις υποκείμενες αρχές πολλών άλλων».[3]

Σύμφωνα με τον θρύλο, ο Θαλής ήταν εκείνος που απέδειξε πρώτος πως οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες και πως κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή (η τελευταία πρόταση ονομάζεται μερικές φορές «θεώρημα του Θαλή»). Δυστυχώς, ο θρύλος είναι το μοναδικό στοιχείο που διαθέτουμε, αφού οι πραγματικές αποδείξεις έχουν εξαφανιστεί προ πολλού. Ωστόσο, οι αρχαίοι τον είχαν σε πολύ μεγάλη υπόληψη, και τον συμπεριλάμβαναν στους «επτά σοφούς της Αρχαιότητας».

Το έργο του Θαλή σηματοδοτεί την «επίσημη έναρξη» της ελληνικής γεωμετρίας. Η εξιστόρηση των μετέπειτα εξελίξεων, των επιτυχιών και των αποτυχιών της, θα καταλάμβανε αναρίθμητα κεφάλαια, αν όχι αναρίθμητα βιβλία. Για τον λόγο αυτό, θα περιοριστούμε σε δύο συγκεκριμένα γεωμετρικά ζητήματα: στο πώς ο Ευκλείδης μπορούσε να κάνει γεωμετρία με έναν «αποσυντιθέμενο» διαβήτη και στο γιατί οι επικούρειοι φιλόσοφοι τον κατηγόρησαν ότι δεν ήταν πιο έξυπνος από έναν γάιδαρο. Αν και τα συγκεκριμένα θέματα ίσως φαίνονται κάπως παράξενα, ωστόσο δίνουν μια ακριβή αίσθηση της μαθηματικής νοοτροπίας εκείνης της εποχής.

Η περιγραφή μας ξεκινάει κάπου στο έτος 300 π.Χ., με τον Ευκλείδη τον Αλεξανδρέα, ο οποίος, αν και συνέθεσε αρκετές μαθηματικές πραγματείες, είναι περισσότερο γνωστός για τα *Στοιχεία*, μια συστηματική παρουσίαση μεγάλου μέρους των ελληνικών μαθηματικών μέχρι εκείνη την εποχή. Το έργο είναι χωρισμένο σε 13 βιβλία και περιλαμβάνει 465 προτάσεις σχετικά με την επιπεδομετρία, τη στερεομετρία και τη θεωρία αριθμών. Η σύνθεση αυτή, που έχει χαρακτηριστεί προσφυώς το σπουδαιότερο μαθηματικό εγχειρίδιο όλων των εποχών, έχει μελετηθεί, τροποποιηθεί και εγκωμιαστεί θερμά από την εμφάνισή του στην αρχαία Ελλάδα μέχρι τις μέρες μας.

Αυτό που κάνει τα *Στοιχεία* τόσο σημαντικό έργο είναι η λογική ανάπτυξη του περιεχομένου από τις βασικές αρχές μέχρι τα πιο εκλεπτυσμένα πορίσματα. Ο Ευκλείδης παραθέτει στην αρχή του Βιβλίου Ι έναν κατάλογο 23 ορισμών προκειμένου ο αναγνώστης να γνωρίζει επακριβώς τη σημασία των όρων που χρησιμοποιεί. Ορίζει ως ***σημείο*** «εκείνο που δεν έχει μέρη» (ένας από τους λιγότερο κατατοπιστικούς ορισμούς του), το ***ισόπλευρο τρίγωνο*** ως ένα τρίγωνο «που έχει τις τρεις πλευρές του ίσες», και το ***ισοσκελές τρίγωνο*** ως ένα τρίγωνο «που έχει δύο από τις πλευρές του ίσες».

Μετά τους αρχικούς ορισμούς, ο Ευκλείδης παρουσιάζει πέντε «αιτήματα» [Σ.τ.Μ.: πρωταρχικά αξιώματα που εισάγονται χωρίς απόδειξη] τα οποία αποτελούν τα θεμέλια της γεωμετρίας του, την αφετηρία από την οποία έπονται όλα τα υπόλοιπα. Τα αιτήματα παρουσιάζονται χωρίς απόδειξη ή αιτιολόγηση· θα πρέπει απλώς να τα δεχθεί κανείς. Ευτυχώς, η αποδοχή τους δεν παρουσίαζε καμία δυσκολία, καθώς οι προτάσεις αυτές φαίνονταν στους συγχρόνους του Ευκλείδη, όπως φαίνονται και στους περισσότερους ανθρώπους της εποχής μας, απολύτως ακίνδυνες. Για τους σκοπούς μας σε αυτό το κεφάλαιο, μας αρκούν τα τρία πρώτα αιτήματα:

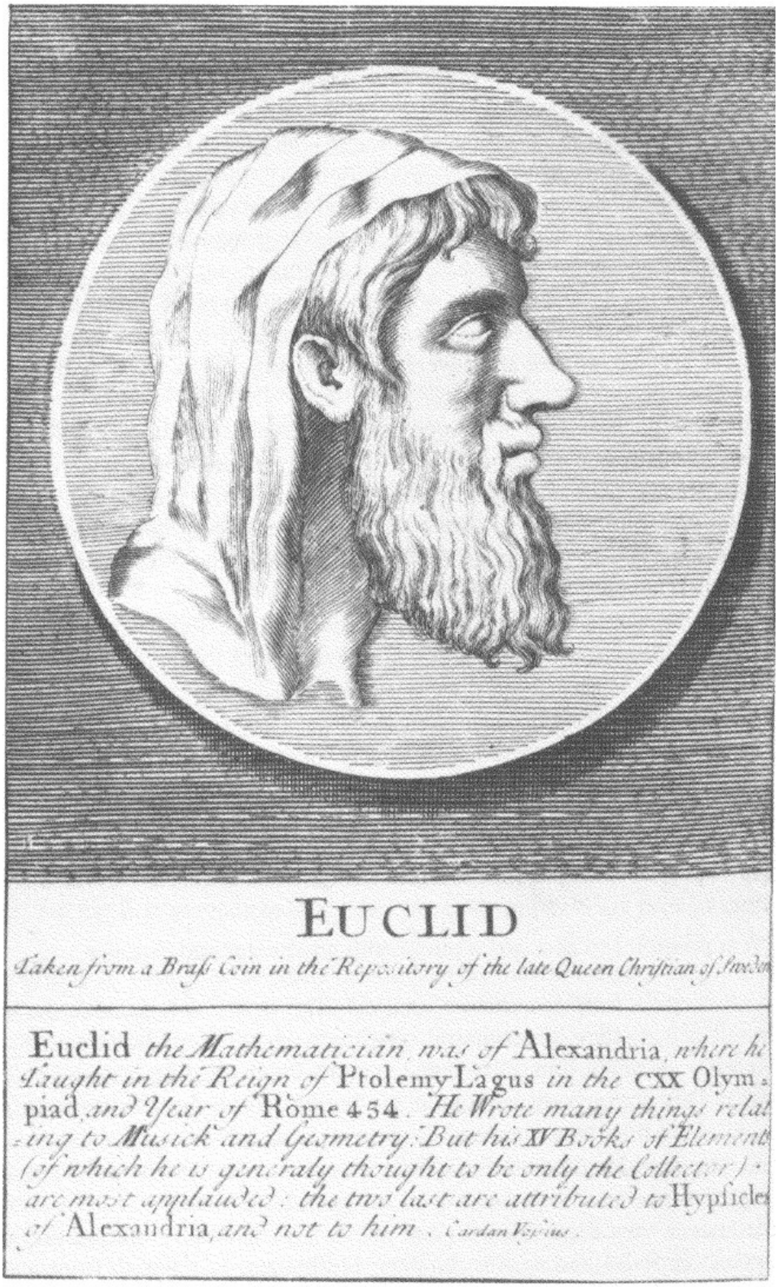
1. [Είναι δυνατόν] να σχεδιάσουμε μια ευθεία γραμμή από οποιοδήποτε σημείο μέχρι οποιοδήποτε σημείο.

2. [Είναι δυνατόν] να επεκτείνουμε μια πεπερασμένη ευθεία γραμμή με συνεχή τρόπο σε μια ευθεία γραμμή.

3. [Είναι δυνατόν] να σχεδιάσουμε έναν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε απόσταση.

Οι προτάσεις αυτές φαίνονται αρκετά απλές και αυταπόδεικτες. Οι δύο πρώτες νομιμοποιούν τη χρήση του αβαθμονόμητου κανόνα (δηλαδή ενός χάρακα χωρίς υποδιαιρέσεις) στις γεωμετρικές κατασκευές, καθώς μας επιτρέπουν να συνδέουμε δύο σημεία με μια ευθεία (αίτημα 1) ή να προεκτείνουμε μια υπάρχουσα ευθεία (αίτημα 2). Σε αυτό ακριβώς χρησιμεύει ένας κανόνας. Το τρίτο αίτημα δηλώνει τι επιτρέπεται να κάνουμε με έναν διαβήτη: να σχεδιάσουμε έναν κύκλο με κέντρο ένα δεδομένο σημείο και με ακτίνα κάποιο προκαθορισμένο μήκος. Δηλαδή, φαίνεται ότι τα τρία πρώτα αιτήματα παρέχουν τη λογική βάση για τη λειτουργία των γεωμετρικών εργαλείων.

Ωστόσο, αν ο αναγνώστης ανακαλέσει στη μνήμη του τα μαθήματα γεωμετρίας από τα μαθητικά του χρόνια, θα θυμηθεί ότι ο διαβήτης επιτελούσε και μια άλλη λειτουργία: τη μεταφορά ενός μήκους από κάποια θέση του επιπέδου σε κάποια άλλη. Η διαδικασία είναι πολύ απλή. Βάζουμε τις δύο απολήξεις του διαβήτη στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο θέλουμε να μεταφέρουμε, ασφαλίζουμε τον διαβήτη ώστε να μείνει σταθερός, τον σηκώνουμε από το επίπεδο σαν άκαμπτο σώμα και κατόπιν τον τοποθετούμε στην επιθυμητή θέση. Πρόκειται για μια διαδικασία απλή και ταυτόχρονα απαραίτητη σε πολλές γεωμετρικές κατασκευές.



Εντούτοις, ο Ευκλείδης δεν συμπεριέλαβε στα αιτήματά του κάποια πρόταση που να επιτρέπει τη μεταφορά μηκών με αυτό τον τρόπο. Εκεί που θα περίμενε κανείς μια αξιωματική διευθέτηση που να επιτρέπει αυτή τη διαδικασία, δεν υπάρχει τίποτα. Παρότι ο διαβήτης του μπορούσε να σχεδιάσει έναν κύκλο, δεν του επιτρεπόταν ρητά να σταθεροποιηθεί σε κάποιο συγκεκριμένο «άνοιγμα» και να μεταφερθεί από τη μία θέση στην άλλη. Έτσι, ο διαβήτης του Ευκλείδη χαρακτηρίστηκε, κάπως εν είδει αστεϊσμού, «αποσυντιθέμενος» (ή αλλιώς «καταρρέων»), περιγραφή που δήλωνε ένα όργανο που κλείνει αυτόματα τη στιγμή που θα το σηκώσει κανείς από το χαρτί.

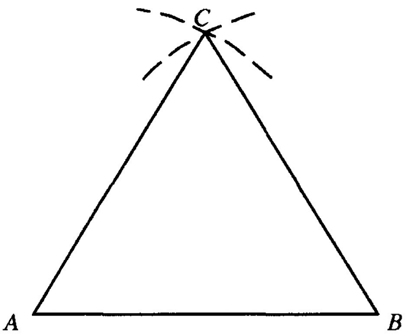
Αυτό θέτει ένα σοβαρό ερώτημα λογικής: Άραγε ο διακεκριμένος Έλληνας γεωμέτρης ξέχασε να συμπεριλάβει ένα αίτημα περί «μεταφοράς μηκών»; Μήπως, δηλαδή, έχουμε εδώ μια γκάφα του Ευκλείδη;

Καθόλου. Όπως θα δούμε αμέσως, ο Ευκλείδης είχε τους λόγους του –ακλόνητους από λογικής πλευράς και απόλυτα ταιριαστούς με τον ελληνικό τρόπο σκέψης– που *δεν* συμπεριέλαβε ένα τέτοιο αίτημα. Η παράλειψη αυτή δεν ήταν γκάφα, αλλά τεκμήριο της γεωμετρικής του οξυδέρκειας και της οργανωτικής του ικανότητας.

Έχοντας θέσει τα αιτήματα, ο Ευκλείδης εισήγαγε στη συνέχεια μερικές «κοινές έννοιες»: αυταπόδεικτες προτάσεις γενικότερης και λιγότερο γεωμετρικής φύσεως. Για παράδειγμα, αποδέχθηκε χωρίς απόδειξη ότι «Πράγματα που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι επίσης ίσα μεταξύ τους», ότι «Αν προστεθούν ίσα μεγέθη σε ίσα μεγέθη, τα ολικά μεγέθη θα είναι ίσα», και ότι «Το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος». Προφανώς, ελάχιστοι θα διαφωνήσουν με αυτές τις προτάσεις.[4]

Κατόπιν αυτών, ήταν έτοιμος να καταδυθεί σε μεγαλύτερα βάθη. Έχοντας να συναγάγει ένα τεράστιο σώμα γεωμετρίας από μια μικροσκοπική συλλογή ορισμών, αιτημάτων και κοινών εννοιών, από πού θα έπρεπε να ξεκινήσει; Πρόκειται για το είδος της αρχικής δυσκολίας που κάνει τους μαθηματικούς (και τους συγγραφείς) να παραλύουν. Αλλά, όπως μας λένε οι Κινέζοι, ένα ταξίδι χιλίων χιλιομέτρων ξεκινάει με ένα μόνο βήμα· αντίστοιχα, το ταξίδι του Ευκλείδη στη γεωμετρία ξεκίνησε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Η πρώτη πρόταση των *Στοιχείων* ήταν η κατασκευή, με αφετηρία ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα, ενός τέτοιου σχήματος.

Το σκεπτικό είναι απλό. Ξεκινώντας από το δεδομένο τμήμα AB της Εικόνας 7.1, κατασκευάζουμε έναν κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα AB, όπως μας επιτρέπει το αίτημα 3. Κατόπιν, επικαλούμενοι το ίδιο αίτημα κατασκευάζουμε, με κέντρο το B και ακτίνα AB, έναν δεύτερο κύκλο. Έστω C το σημείο τομής των κυκλικών τόξων (σχετικά με την ύπαρξη ενός τέτοιου σημείου τομής, βλ. τις σημειώσεις του κεφαλαίου).[5] Κατόπιν σχεδιάζουμε τις ευθείες AC και BC με βάση το αίτημα 1, σχηματίζοντας το $\triangle ABC$. Σε αυτό το τρίγωνο, οι πλευρές AB και AC έχουν το ίδιο μήκος διότι είναι ακτίνες του πρώτου κύκλου, και οι πλευρές AB και BC έχουν το ίδιο μήκος διότι είναι ακτίνες του δεύτερου κύκλου. Δεδομένου ότι πράγματα που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι ίσα και μεταξύ τους, και οι τρεις πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους. Σύμφωνα



Εικόνα 7.1

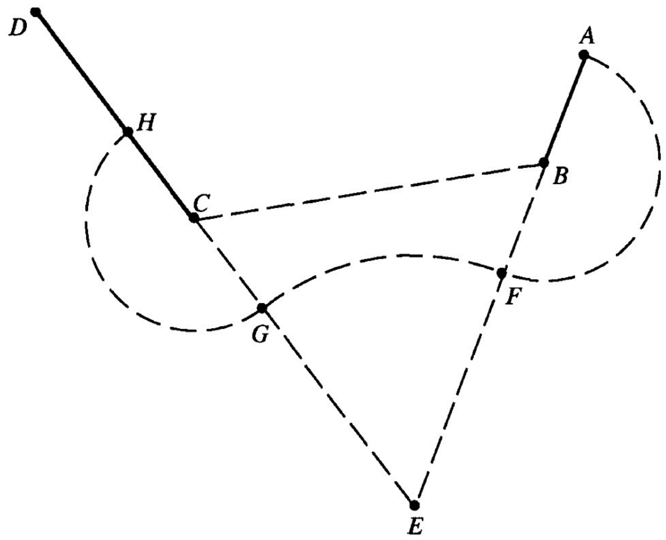
με τον ορισμό του Ευκλείδη, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Μια κρίσιμη παρατήρηση σχετικά με την κατασκευή αυτή είναι ότι, χρησιμοποιώντας τον διαβήτη, ο Ευκλείδης δεν χρειάστηκε ποτέ να τον μετακινήσει σαν στερεό σώμα. Αφού σχεδιαστεί το κάθε τόξο, ο διαβήτης μπορεί να αποσυντεθεί χωρίς αυτό να επηρεάσει την απόδειξη ούτε στο ελάχιστο.

Αλλά στις επόμενες δύο προτάσεις του Βιβλίου I, ο Ευκλείδης έδειξε πώς μπορούσε να μεταφερθεί ένα μήκος *ακόμα και με έναν διαβήτη που αποσυντίθεται*. Αυτό σημαίνει ότι η μεταφορά μηκών ήταν μια παρεπόμενη δυνατότητα των αιτημάτων που ήδη συμπεριλαμβάνονταν στον κατάλογο. Ένα νέο αίτημα με αυτό τον σκοπό θα ήταν μια περιττή αποσκευή, και ο Ευκλείδης ήταν αρκετά ευφυής για να το αντιληφθεί αυτό.

Οι αποδείξεις του –που εδώ συνδυάζονται σε ένα ενιαίο σκεπτικό– ήταν κομψότατες. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το τμήμα AB που βλέπουμε στην Εικόνα 7.2, και θέλουμε να μεταφέρουμε το μήκος του πάνω στο τμήμα CD που ξεκινάει από το σημείο C. Αρχικά, χρησιμοποιούμε τον κανόνα και εφαρμόζουμε το αίτημα 1 για να σχεδιάσουμε το τμήμα που συνδέει τα σημεία B και C. Κατόπιν, από το τμήμα BC κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο BCE· η νομιμότητα αυτής της κατασκευής είναι, βέβαια, ακριβώς αυτό που τεκμηριώθηκε στην προηγούμενη πρόταση.

Στη συνέχεια αρχίζουμε έναν γύρο σχεδιασμού κύκλων. Με κέντρο το B και ακτίνα AB, κατασκευάζουμε έναν κύκλο που τέμνει το BE στο σημείο F (όπου όταν σηκώνουμε τον διαβήτη υποθέτουμε ότι αποσυντίθεται). Με κέντρο το E και ακτίνα EF, σχεδιάζουμε έναν κύκλο που τέμνει το CE στο σημείο G (και πάλι, ο διαβήτης αποσυντίθεται όταν τον σηκώνουμε από το χαρτί). Με κέντρο το C και ακτίνα CG, σχεδιάζουμε έναν τελευταίο κύκλο που τέμνει το CD στο σημείο H. Όλες αυτές οι κατασκευές επιτρέπονται με βάση το τρίτο αίτημα του Ευκλείδη, και καμία τους δεν απαιτεί έναν άκαμπτο διαβήτη.



Εικόνα 7.2

Στη συνέχεια απλώς καταστρώνουμε μια αλληλουχία ισοτήτων (όπου συμβολίζουμε το *μήκος* του τμήματος XY με $\overline{XY}$):

$$
\begin{aligned}
\overline{AB} &= \overline{BF} && \text{διότι είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου}\\
&= \overline{BE} - \overline{EF} \\
&= \overline{BE} - \overline{EG} && \text{διότι τα } EF \text{ και } EG \text{ είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου}\\
&= \overline{CE} - \overline{EG} && \text{διότι οι τρεις πλευρές του } \triangle BCE \text{ είναι ισομήκεις}\\
&= \overline{CG} \\
&= \overline{CH} && \text{διότι και πάλι έχουμε ακτίνες του ίδιου κύκλου}
\end{aligned}
$$

Από την αρχή και το τέλος αυτής της αλυσίδας έχουμε ότι $\overline{AB} = \overline{CH}$. Επομένως, το αρχικό μήκος του AB έχει μεταφερθεί πάνω στο τμήμα CD όπως ήταν το ζητούμενο, χωρίς να χρειαστεί πουθενά να σηκώσουμε από το χαρτί έναν διαβήτη και να τον μετακινήσουμε σαν στερεό σώμα.

Το αναπάντεχο συμπέρασμα αυτής της απόδειξης είναι ότι οι κατασκευές που φαίνονται να απαιτούν έναν μη αποσυντιθέμενο διαβήτη μπορούν στην πραγματικότητα να πραγματοποιηθούν με έναν αποσυντιθέμενο. Επομένως, καθώς ο Ευκλείδης ανέπτυσσε στη συνέχεια τη γεωμετρία του περαιτέρω, είχε το δικαίωμα να μεταφέρει ένα μήκος από μια θέση σε μια άλλη σαν να είχε στη διάθεσή του έναν άκαμπτο διαβήτη, βασιζόμενος στο παραπάνω θεώρημα.

Λύνοντας το ζήτημα αυτό τόσο νωρίς και τόσο απλά, ήταν ελεύθερος να χρησιμοποιήσει το συμπέρασμα σε όλη την παρακάτω πραγμάτευσή του.

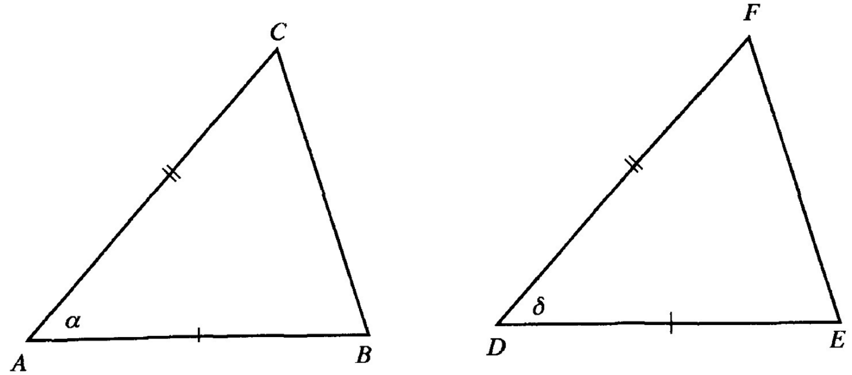
Σε αυτό το σημείο κάποιοι αναγνώστες ίσως να πνίγουν ένα χασμουρητό, θεωρώντας το όλο θέμα πολύ κακό για το τίποτα. Στο κάτω-κάτω, όλοι ξέρουν ότι τα χαρτοπωλεία πουλάνε φτηνούς μεταλλικούς διαβήτες που είναι φτιαγμένοι ώστε να μπορούν να μένουν ανοιχτοί, και σίγουρα δεν θα έβλαπτε ιδιαίτερα αν ο Ευκλείδης είχε εισαγάγει ένα ακόμα αίτημα για αυτό τον σκοπό.

Όσοι υποστηρίζουν αυτή την άποψη πιστεύουμε ότι δεν έχουν ακόμα συλλάβει το πνεύμα της τυπικής ελληνικής γεωμετρίας. Κατ' αρχάς, η ύπαρξη άκαμπτων διαβητών στον πραγματικό κόσμο δεν έχει καμία σχέση με την ανάπτυξη πρότυπων, ιδανικών εννοιών. Δεύτερον, εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν χαρτοπωλεία. Τρίτον, και πιο καίριο, ο Ευκλείδης δεν θα ήθελε να προσθέσει στον κατάλογό του ένα *περιττό* αίτημα. Γιατί να δεχθεί κάτι που θα μπορούσε να συναχθεί από άλλες παραδοχές; Αυτό θα έκανε τα αιτήματά του λιγότερο γνήσια, λιγότερο ορθολογικά και λιγότερο τέλεια, και επομένως θα παραβίαζε μια αισθητική, και όχι μια μαθηματική, αρχή. Το ότι τα αισθητικά κριτήρια έπαιζαν καθοριστικό ρόλο στα ελληνικά μαθηματικά είναι προφανές. Στην παραπάνω απόδειξη του Ευκλείδη διακρίνουμε φευγαλέα αυτό που εννοούσε ο Ivor Thomas όταν έγραφε:

> [Ένα] χαρακτηριστικό που αποκλείεται να μην εντυπωσιάσει έναν σύγχρονο μαθηματικό είναι η τελειότητα της μορφής στο έργο των μεγάλων Ελλήνων γεωμετρών. Αυτή η τελειότητα της μορφής, που είναι μια άλλη έκφραση της ίδιας ιδιοφυΐας που μας έδωσε τον Παρθενώνα και τις τραγωδίες του Σοφοκλή, ενυπάρχει στον ίδιο βαθμό τόσο στην απόδειξη μεμονωμένων προτάσεων όσο και στη συγκρότηση αυτών των ξεχωριστών προτάσεων σε βιβλία· φτάνει στο απόγειό της, ίσως, στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.[6]

Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε λίγο πιο βαθιά στο Βιβλίο I, όπου θα συναντήσουμε κι άλλα πειστήρια της ιδιοφυΐας του Ευκλείδη. Αφού διευθέτησε το ζήτημα του αποσυντιθέμενου διαβήτη στις προτάσεις 2 και 3, ο Ευκλείδης απέδειξε στην πρόταση 4 ένα από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, το κριτήριο Πλευράς-Γωνίας-Πλευράς (ή αλλιώς Π-Γ-Π), όπως λέγεται. Δηλαδή (βλ. Εικόνα 7.3), αν έχουμε δύο τρίγωνα ABC και DEF στα οποία $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ και οι περιεχόμενες γωνίες α και δ είναι επίσης ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος και σχήμα. Με άλλα λόγια, αν σηκώναμε το $\triangle DEF$ και το τοποθετούσαμε επάνω στο $\triangle ABC$, τα δύο τρίγωνα θα συνέπιπταν τέλεια, γραμμή προς γραμμή, γωνία προς γωνία, σημείο προς σημείο.

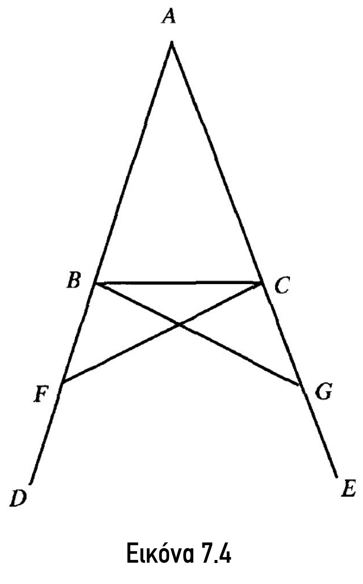
Στα χέρια του Ευκλείδη, η ισότητα τριγώνων ήταν το *κατ' εξοχήν* εργαλείο για την απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων. Στη συνέχεια της παρουσίασής του



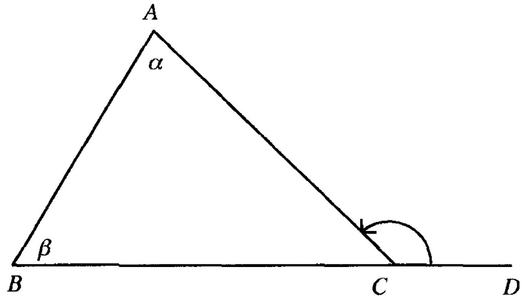
Εικόνα 7.3

τεκμηρίωσε τα άλλα κριτήρια ισότητας Πλευρά-Πλευρά-Πλευρά (ή Π-Π-Π), στην πρόταση 8, και Γωνία-Πλευρά-Γωνία (Γ-Π-Γ) και Γωνία-Γωνία-Πλευρά (Γ-Γ-Π), στην πρόταση 26.

Στην πρόταση 5 του Βιβλίου Ι αποδεικνύεται ότι οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Όπως αναφέραμε, το αποτέλεσμα αυτό αποδίδεται στον Θαλή, αλλά η απόδειξη στα *Στοιχεία* είναι μάλλον του ίδιου του Ευκλείδη.[7] Αν και δεν θα την παρουσιάσουμε εδώ, σημειώνουμε ότι συνοδευόταν από το σχήμα της Εικόνας 7.4. Το συγκεκριμένο σχήμα, που θυμίζει γέφυρα (τουλάχιστον σε όσους έχουν πολύ ζωηρή φαντασία) ίσως να εξηγεί για ποιο λόγο η πρόταση 5 έχει ονομαστεί *pons asinorum*, δηλαδή «γέφυρα



Εικόνα 7.4



Εικόνα 7.5

των γαϊδάρων». Σύμφωνα με την παράδοση, οι μπουμπούνες –δηλαδή οι γάιδαροι– βρίσκουν ότι η απόδειξη ξεπερνάει τις δυνάμεις τους και επομένως δεν μπορούν να διασχίσουν αυτή τη λογική γέφυρα που οδηγεί στη γεωμετρική γη της επαγγελίας των *Στοιχείων*.

Αν οι αδύνατοι μαθητές παρομοιάζονταν με γαϊδάρους, την ίδια μοίρα επιφύλασσαν και για τον ίδιο τον Ευκλείδη οι επικούρειοι με αφορμή την απόδειξή του για την πρόταση 20. Για να δούμε το γιατί, θα πρέπει πρώτα να περιγράψουμε μερικά από τα ενδιάμεσα θεωρήματα του Βιβλίου I.

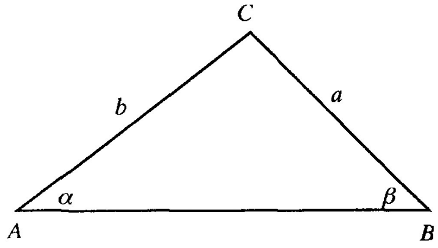
Αφού διέσχισε την *pons asinorum*, ο Ευκλείδης έδειξε πώς μπορεί κανείς να διχοτομεί γωνίες και να κατασκευάζει καθέτους με κανόνα και διαβήτη, και σύντομα έφτασε σε ένα από τα κεντρικά θεωρήματα του Βιβλίου I, γνωστό ως θεώρημα της εξωτερικής γωνίας. Το αποτέλεσμα αυτό, που αποτελεί την πρόταση 16, πιστοποιεί ότι η εξωτερική γωνία οποιουδήποτε τριγώνου υπερβαίνει καθεμία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες. Δηλαδή (βλ. Εικόνα 7.5), αν ξεκινήσουμε από το $\triangle ABC$ και προεκτείνουμε την πλευρά BC δεξιά προς το D, τότε αμφότερες οι γωνίες α και β είναι μικρότερες της $\angle ACD$.

Το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας ήταν η πρώτη γεωμετρική ανισότητα των *Στοιχείων*. Ενώ ο Ευκλείδης προηγουμένως είχε δείξει ότι συγκεκριμένες πλευρές ή γωνίες είναι ίσες (όπως στην *pons asinorum*), στη συγκεκριμένη πρόταση απέδειξε ότι κάποιες γωνίες είναι άνισες. Το θεώρημα αυτό θα έπαιζε σημαντικό ρόλο στο υπόλοιπο του Βιβλίου I.

Αυτό μας φέρνει σε μια άλλη ανισότητα, την πρόταση 19, της οποίας το σχήμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.6. Η διατύπωση του Ευκλείδη ήταν η εξής: «Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά», δηλαδή σε σύγχρονο συμβολισμό:

ΠΡΟΤΑΣΗ 19: Στο $\triangle ABC$, αν $\beta > \alpha$, τότε $\overline{AC} > \overline{BC}$ (δηλ., $b > a$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Υποθέτουμε ότι $\beta > \alpha$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η πλευρά AC απέναντι από την $\angle ABC$ είναι μεγαλύτερη από την πλευρά BC απέναντι από την $\angle BAC$.



Εικόνα 7.6

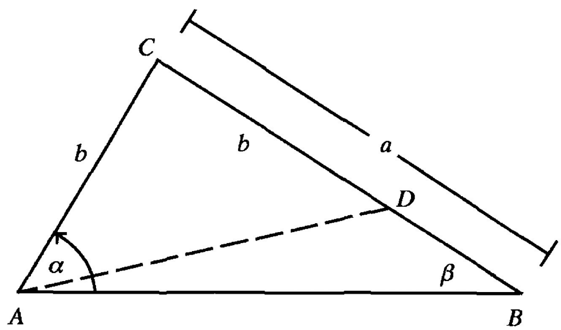
Ο Ευκλείδης εξέτασε ξεχωριστά τις τρεις δυνατές περιπτώσεις: $b = a$, $b < a$ και $b > a$. Η στρατηγική του ήταν να δείξει ότι οι πρώτες δύο είναι αδύνατες και έτσι να συμπεράνει ότι θα πρέπει να αναγκαστικά να ισχύει η τρίτη περίπτωση, όπως ορίζει το θεώρημα. Μια τέτοια τεχνική ονομάζεται «διπλή εις άτοπον απαγωγή». Η ισχυρή αυτή λογική στρατηγική εφαρμόστηκε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο από τους Έλληνες μαθηματικούς. Ιδού πώς τη χειρίστηκε ο Ευκλείδης:

Περίπτωση 1: Έστω ότι $b = a$.

Στην Εικόνα 7.6, έχουμε ότι $\overline{BC} = a = b = \overline{AC}$. Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο $\triangle ABC$ είναι ισοσκελές και άρα, βάσει του *pons asinorum*, συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες της βάσης είναι ίσες. Δηλαδή, $\angle BAC = \angle ABC$ ή ισοδύναμα $\alpha = \beta$. Αλλά το συμπέρασμα αυτό αντιβαίνει προς την αρχική μας παραδοχή ότι $\beta > \alpha$. Επομένως, απορρίπτουμε την Περίπτωση 1 ως αδύνατη.

Περίπτωση 2: Έστω ότι $b < a$.

Εδώ έχουμε την κατάσταση που αναπαριστάται στην Εικόνα 7.7. Δεδομένου ότι υποθέτουμε πως το τμήμα AC είναι μικρότερο του BC, μπορούμε να κατασκευάσουμε το τμήμα CD μήκους b όπου το D βρίσκεται εντός της



Εικόνα 7.7

μεγαλύτερης πλευράς BC. Κατόπιν φέρουμε το τμήμα AD σχηματίζοντας το $\triangle ADC$. Το τρίγωνο αυτό, έχοντας δύο πλευρές μήκους b, είναι ισοσκελές, και επομένως έχει ίσες γωνίες βάσης $\angle DAC$ και $\angle ADC$. Αν εφαρμόσουμε όμως το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας στο λεπτό τρίγωνο $\triangle ABD$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \beta &= \text{εσωτερική } \angle ABD \\ &< \text{εξωτερική } \angle ADC && \text{βάσει του θεωρήματος της εξωτερικής γωνίας} \\ &= \angle DAC && \text{διότι το } \triangle DAC \text{ είναι ισοσκελές} \\ &< \angle BAC && \text{διότι το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, $\beta < \alpha$, πράγμα που αντιβαίνει προς την αρχική προϋπόθεση του θεωρήματος ότι $\beta > \alpha$. Αφού λοιπόν η Περίπτωση 2 οδηγεί σε αντίφαση, απορρίπτεται επίσης. Η μόνη που μας απομένει είναι η:

Περίπτωση 3: $b > a$.

Δεδομένου ότι δεν έχει απομείνει καμία εναλλακτική δυνατότητα, η ανισότητα αυτή αναγκαστικά ισχύει, οπότε το θεώρημα έχει αποδειχθεί. ■

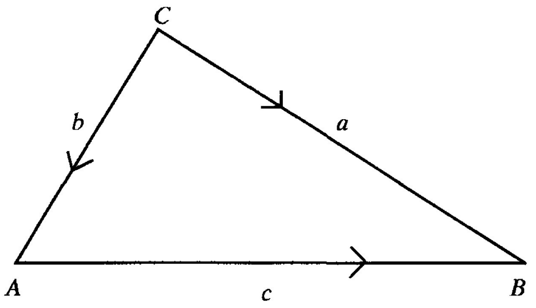
Και φτάνουμε πλέον στην πρόταση η οποία ενόχλησε τόσο πολύ τους επικούρειους φιλοσόφους. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται αρκετά αθώα:

ΠΡΟΤΑΣΗ 20: Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δύο πλευρών είναι μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς.

Προς τι η αντιπαράθεση; Προς τι ο χλευασμός; Ας δούμε τι αναφέρει ο σχολιαστής Πρόκλος:

> Οι επικούρειοι έχουν τη συνήθεια να χλευάζουν αυτό το θεώρημα, λέγοντας ότι είναι προφανές ακόμα και σε έναν γάιδαρο και δεν χρειάζεται καμία απόδειξη· είναι εξίσου ίδιον του αδαούς, λένε, το να έχει την απαίτηση να πειστεί για προφανείς αλήθειες όπως και το να πιστεύει χωρίς καμία αμφισβήτηση αυτό που είναι ασαφές. Ότι το συγκεκριμένο θεώρημα είναι γνωστό και σε έναν γάιδαρο το συμπεραίνουν από την παρατήρηση ότι, αν βάλουμε σανό στο ένα άκρο των πλευρών, ένας γάιδαρος που αναζητά τροφή θα κινηθεί προς τα εκεί κατά μήκος της μίας πλευράς και όχι δια μέσου των δύο άλλων.[8]

Εν ολίγοις, ακόμα κι ένα χαζό ζώο ξέρει να πάρει την ευθεία διαδρομή από το C προς το B στην Εικόνα 7.8 αντί να πάει γύρω-γύρω ακολουθώντας τη μακρύτερη διαδρομή δια μέσου του A. Επομένως, γιατί, ρωτούσαν οι επικούρειοι,



$b + c > a$

Εικόνα 7.8

μπήκε ο Ευκλείδης στον κόπο να αποδείξει κάτι τόσο προκλητικά προφανές; Ο Πρόκλος έδωσε την εξής απάντηση:

> Θα πρέπει να απαντήσουμε ότι, αν και πράγματι το θεώρημα είναι ευνόητο όσον αφορά την αισθητηριακή αντίληψη, εξακολουθεί να μην είναι αδιάσειστο όσον αφορά την επιστημονική σκέψη. Πολλά πράγματα είναι της ίδιας φύσεως· για παράδειγμα, το ότι η φωτιά θερμαίνει. Αυτό είναι προφανές στην αίσθηση, αλλά είναι έργο της επιστήμης να βρει το πώς θερμαίνει.[9]

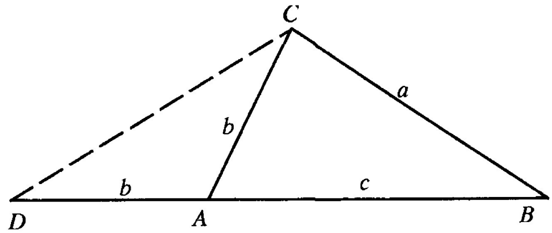
Στο πνεύμα του Ευκλείδη, το τόσο αντιπροσωπευτικό της ελληνικής γεωμετρίας, θα πρέπει να επιστρατεύσουμε τις ικανότητες της λογικής μας για να αποδείξουμε αυτό που ένας γάιδαρος γνωρίζει από ένστικτο. Ακόμα και μια φαινομενικά αυταπόδεικτη πρόταση ζητά επιτακτικά μια απόδειξη, και ο Ευκλείδης ήταν προθυμότατος να την παράσχει. Το σκεπτικό του, το οποίο βασιζόταν σε προηγούμενα αποτελέσματα, είχε ως εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ 20: Στο $\triangle ABC$, $\overline{AC} + \overline{AB} > \overline{BC}$ (δηλ., $b + c > a$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Στην Εικόνα 7.9, επεκτείνουμε την πλευρά BA μέχρι ένα σημείο D τέτοιο ώστε $\overline{AD} = \overline{AC} = b$, οπότε έχουμε ότι $\overline{BD} = b + c$. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται το $\triangle DAC$, το οποίο είναι ισοσκελές, διότι έχει δύο πλευρές μήκους b. Στο μεγάλο $\triangle BDC$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \angle BCD &> \angle ACD \text{ διότι το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος} \\ &= \angle BDC \text{ διότι είναι οι γωνίες βάσης του ισοσκελούς } \triangle DAC. \end{aligned}$$

Επομένως, η $\angle BCD$ είναι μεγαλύτερη της $\angle BDC$. Δεδομένου ότι ο Ευκλείδης είχε μόλις αποδείξει ότι η μεγαλύτερη πλευρά είναι απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία, έπεται ότι $\overline{BD} > \overline{BC}$· με άλλα λόγια, $b + c > a$, δηλαδή ακριβώς αυτό που έπρεπε να αποδειχθεί. ■



Εικόνα 7.9

Πρόκειται για μια έξοχη μικρή απόδειξη. Έχει τα λεπτά της σημεία, την έξυπνη χρήση των ανισοτήτων, την ήρεμη κομψότητά της.

Στο βιβλίο του Άρθουρ Κόναν Ντόυλ *Σπουδή στο κόκκινο*, ο Δρ Γουώτσον περιγράφει τις συμπερασματικές ικανότητες του Σέρλοκ Χολμς με αυτά τα λόγια: «Τα συμπεράσματά του ήταν εξίσου αλάνθαστα με τόσες πολλές προτάσεις του Ευκλείδη».[10] Ο Γουώτσον δεν ήταν ο μόνος που είχε υψηλή εκτίμηση για τον Έλληνα γεωμέτρη. Αιώνες πριν, ο Άραβας λόγιος αλ-Κιφτί είχε πει για την Ευκλείδη: «πράγματι, δεν υπήρξε κανείς, ούτε μεταγενέστερός του, που να μη βάδισε στα χνάρια του»,[11] ενώ και ο ασύγκριτος Albert Einstein απέτισε τον δικό του φόρο τιμής: «Αν ο Ευκλείδης δεν κατάφερε να εξάψει τον νεανικό σας ενθουσιασμό, τότε δεν είστε γεννημένοι για την επιστημονική σκέψη».[12]

Αυτά που εξετάσαμε μέχρι στιγμής, βέβαια, δεν είναι παρά η κορυφή του παγόβουνου, απλώς ένα δείγμα αυτού που ο ιστορικός Morris Kline αποκαλεί «μεγαλοπρεπή άσκηση λογικής» των Ελλήνων.»[13] Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τους αφήσουμε. Αλλά κατά μία έννοια κανένας μαθηματικός δεν μπορεί να αφήσει πίσω του την κληρονομιά που κατέλιπαν οι κλασικοί γεωμέτρες. Επινόησαν τα αποδεικτικά μαθηματικά, ακόνισαν τα εργαλεία τους και τα έστρεψαν προς κατευθύνσεις τις οποίες έχουν ακολουθήσει από τότε. Κλείνουμε με τα λόγια του Βρετανού μαθηματικού του εικοστού αιώνα G. H. Hardy: «Οι Έλληνες … μίλησαν μια γλώσσα την οποία οι σύγχρονοι μαθηματικοί μπορούν να καταλάβουν· όπως μου είπε κάποτε ο Littlewood, δεν είναι έξυπνα σχολιαρόπαιδα ή "υποψήφιοι υπότροφοι", αλλά "Εταίροι ενός άλλου πανεπιστημίου"».[14]

Κανείς δεν μπορεί να διαφωνήσει με τον Hardy όταν λέει ότι «τα ελληνικά μαθηματικά είναι τα αυθεντικά μαθηματικά».