

Εισαγωγή

Ο τόμος αυτός είναι ο πρώτος μιας σειράς από μεταφράσεις επιλεγμένων μαθηματικών άρθρων που δημοσιεύτηκαν στο ρωσικό περιοδικό *Kvant* (που σημαίνει «Κβάντο») από το 1970. Η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία σχεδιάζει να εκδίδει έναν αριθμό τόμων κάθε χρόνο για αρκετά χρόνια στο μέλλον. Τα άρθρα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: άλγεβρα και ανάλυση, γεωμετρία και τοπολογία, διακριτά μαθηματικά (ο παρών τόμος ανήκει στην πρώτη κατηγορία).

Πιθανότατα ο αναγνώστης δεν γνωρίζει τίποτα για το *Kvant*. Η επίδραση αυτού του περιοδικού στη διδασκαλία των μαθηματικών και της φυσικής στη Σοβιετική Ένωση ήταν τεράστια. Θα περιγράψουμε συνοπτικά την ιστορία του *Kvant*, αποτίοντας έναν μικρό φόρο τιμής στους ανθρώπους που το δημιούργησαν. Το κείμενο αυτό είναι επίσης μια προσωπική περιγραφή του «ερωτά» μου με το *Kvant*, ο οποίος διήρκεσε για περισσότερα από 20 χρόνια.

Ήμουν μαθητής της πρώτης γυμνασίου όταν, πριν από 28 χρόνια, άνοιξα το πρώτο τεύχος του *Kvant* (στο οποίο με είχαν γράψει συνδρομητή οι γονείς μου). Δεν μπορούσα να καταλάβω σχεδόν τίποτα: η ύλη του μου φαινόταν υπερβολικά δύσκολη. Θυμάμαι την απογοήτευσή μου (την οποία γνωρίζει πολύ καλά κάθε σπουδαστής κολεγίου που παίρνει το πρώτο του σοβαρό μάθημα στα μαθηματικά) που συνδυαζόταν με τη λαχτάρα να εξερευνήσω και να κατακτήσω τον υπέροχο κόσμο των μαθηματικών και της φυσικής που ανοιγόταν μπροστά μου. Από τότε παρέμεινα αφοσιωμένος αναγνώστης του *Kvant* μέχρι τέλους. Η ανάμειξή μου συνεχίστηκε τη δεκαετία του 1980 με την ιδιότητα του συντάκτη περίπου 20 άρθρων που δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό. Το 1988 μου προτάθηκε η θέση του επικεφαλής του Τμήματος Μαθηματικών του *Kvant*, και φυσικά δεν δίστασα καθόλου να την αποδεχθώ (έμεινα σε αυτή τη θέση για δύο χρόνια, και έπειτα έφυγα για να διδάξω σε ένα αμερικανικό πανεπιστήμιο).

Το *Kvant* ξεκίνησε να εκδίδεται το 1970 από μια ομάδα διακεκριμένων Σοβιετικών φυσικών και μαθηματικών· ο πρώτος του αρχισυντάκτης ήταν ο διάσημος φυσικός Iszaak Kikoin, και βοηθός αρχισυντάκτη ήταν ο μεγάλος μα-

θηματικός Andrei Kolmogorov. Παρότι η δεκαετία του 1970 ήταν μια μάλλον «σκοτεινή» περίοδος στην ιστορία της Ρωσίας, το *Kvant* ήταν προϊόν της μετασταλινικής «απόψυξης», και σε όλη του την πορεία το πνεύμα που επικρατούσε στους κόλπους του ήταν εκείνο της ανεξαρτησίας.

Η φυσική και τα μαθηματικά ήταν ιδιαίτερα δημοφιλή στη Σοβιετική Ένωση εκείνη την εποχή (εν μέρει επειδή οι κλάδοι αυτοί είχαν τη μέγιστη δυνατή απόσταση από την ιδεολογία): τα ειδικά σχολεία για φυσική και μαθηματικά γνώριζαν μεγάλη άνθηση, οι ολυμπιάδες μαθηματικών και φυσικής προσείλκυαν πολλούς μαθητές λυκείου, και οι εισαγωγικές εξετάσεις για τα τμήματα φυσικής και μαθηματικών των καλών πανεπιστημίων ήταν πολύ απαιτητικές και ανταγωνιστικές (στη Ρωσία, οι εισαγωγικές εξετάσεις είναι εξειδικευμένες: για παράδειγμα, όποιος θέλει να γίνει μαθηματικός θα πρέπει να περάσει τέσσερεις εξετάσεις: γραπτά και προφορικά μαθηματικά, προφορική φυσική και έκθεση).

Το *Kvant* κυκλοφορούσε μόνο με συνδρομές. Τη δεκαετία του 1970 είχε περισσότερους από 300.000 συνδρομητές, ένας απίστευτος αριθμός: τη δεκαετία του 1980 ο αριθμός μειώθηκε με αργό ρυθμό περίπου στις 200.000, και τη δεκαετία του 1990, με την κατάρρευση της Σοβιετικής Ένωσης και τις ριζικές αλλαγές που επισυνέβησαν σε όλες τις πτυχές της ζωής στη Ρωσία, η κυκλοφορία του περιοδικού μειώθηκε δραματικά. Από το 1991, κυκλοφορεί στις χώρες της Δύσης το αγγλόγλωσσο αδελφάκι του *Kvant*, ονόματι «Quantum»: αυτή τη στιγμή εκδίδεται από την Springer-Verlag (το «Quantum» δεν είναι πανομοιότυπο σε περιεχόμενο με το *Kvant*: ένα μέρος της ύλης του έχει δημοσιευτεί προηγουμένως στο *Kvant* και ένα άλλο μέρος είναι πρωτότυπες συνεισφορές).

Το *Kvant* ήταν μηνιαίο περιοδικό, και το κόστος της συνδρομής του ήταν πολύ προσιτό (η τιμή ενός τεύχους ήταν περίπου ίση με το κόστος ενός γεύματος). Το περιοδικό εκδιδόταν από δύο διεπιστημονικές Ακαδημίες: την Ακαδημία Επιστημών και την Ακαδημία Παιδαγωγικών Επιστημών και οι δυο τους ήταν τεράστιοι και πλούσιοι οργανισμοί, και επομένως το *Kvant* διέθετε σημαντικούς οικονομικούς πόρους. Ειδικότερα, όλη η –πολύ πλούσια– εικονογράφηση ήταν έγχρωμη. Εκτός από τη Συντακτική Επιτροπή και το Συντακτικό Συμβούλιο, το προσωπικό του *Kvant* περιλάμβανε περίπου δέκα επιμελητές πλήρους απασχόλησης (κάποιοι από τους οποίους ήταν κάτοχοι διδακτορικού), γραμματείς και δακτυλογράφους (αφού εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν ακόμα υπολογιστές σε ευρεία χρήση). Αντίθετα με πολλά εκλαϊκευτικά περιοδικά, όλα τα άρθρα που υποβάλλονταν περνούσαν από κρίση: οι συντάκτες τους λάμβαναν μια σχετικά γενναϊόδωρη αμοιβή.

Αξίζει να πούμε λίγα λόγια σχετικά με την κάπως ασυνήθιστη αντιμετώπιση των άρθρων που υποβάλλονταν στο *Kvant*. Είχα την πρώτη μου επαφή

με αυτό το σύστημα στα τέλη της δεκαετίας του 1970 όταν, νεόκοπος πτυχιούχος του πανεπιστημίου και επίδοξος συντάκτης του *Kvant*, υπέβαλα το πρώτο μου άρθρο στο περιοδικό. Αργότερα, όταν εντάχθηκα στο δυναμικό του, έμαθα περισσότερα για τον τρόπο εργασίας με τους συντάκτες των άρθρων υπό την ιδιότητα του επιμελητή. Το *Kvant* είχε πολύ υψηλά κριτήρια στο ζήτημα της παρουσίας, και τα περισσότερα από τα κείμενα που υποβάλλονταν δεν πληρούσαν αυτά τα κριτήρια. Η έγκριση ενός άρθρου από την Συντακτική Επιτροπή ήταν, σε πολλές περιπτώσεις, μόνο η αρχή μιας σοβαρής επεξεργασίας του άρθρου αυτού. Η επεξεργασία αυτή περιλάμβανε εκτενή επιμέλεια, συχνά πλήρη αναθεώρηση και ανασύνταξη (μερικές φορές από κοινού με τους επιμελητές), και σε ορισμένες περιπτώσεις συγχώνευση πολλών άρθρων σε ένα (μου είναι αδύνατον να φανταστώ τέτοιου είδους επιμέλεια στο «*American Mathematical Monthly*», λόγου χάριν – απλώς σκεφτείτε τα νομικά ζητήματα που θα ανέκυπταν!). Το τελικό αποτέλεσμα συχνά ήταν ριζικά διαφορετικό, αλλά πάντοτε καλύτερο, από το αρχικό άρθρο που είχε υποβληθεί.

Ποιοι ήταν οι αναγνώστες του *Kvant*; Οι περισσότεροι ήταν μαθητές λυκείου και δάσκαλοι· σε μεγάλο ποσοστό ενδιαφέρονταν πρωτίστως για την ύλη προετοιμασίας για τις εισαγωγικές εξετάσεις στο πανεπιστήμιο. Πολλές σχολικές βιβλιοθήκες είχαν συνδρομή στο *Kvant*, και συχνά συνέβαινε ένα τεύχος να διαβάζεται από πολλούς αναγνώστες. Ένα μέρος του κοινού του περιοδικού αποτελούνταν από προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές, ερευνητές και απλούς αναγνώστες που ενδιαφέρονταν για τη φυσική και τα μαθηματικά (πράγμα που είχε και την αρνητική του πλευρά: το *Kvant* δεχόταν και δέχεται πολλές κατασκευές τριχοτόμησης της γωνίας, αποδείξεις του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, κ.λπ.).

Η ελκυστικότητα του *Kvant* οφειλόταν σε μεγάλο βαθμό στην αισθητική της εμφάνισής του. Δεν εννοώ τα τεχνικά σχήματα που περιλάμβανε η εικονογράφηση των άρθρων (και τα οποία στην παρούσα έκδοση αναπαράγονται ασπρόμαυρα), αλλά τις εικόνες που συνόδευαν τα άρθρα (και οι οποίες δυστυχώς δεν αναπαράγονται εδώ): το κάθε τεύχος περιλάμβανε κάποιες τέτοιες εικόνες, οι περισσότερες από τις οποίες ήταν ολοσέλιδες (παρόμοιες υπάρχουν και στο «*Quantum*»). Στο *Kvant* εργάστηκαν αρκετοί βραβευμένοι εικονογράφοι βιβλίων, στους οποίους το περιοδικό προσέφερε μια ευκαιρία να εκφράζονται ελεύθερα: η τέχνη τους ήταν υπερβολικά τολμηρή για το γούστο που επικρατούσε στους επίσημους κύκλους. Μια επιπλέον πρόκληση ήταν η συσχέτιση του εικαστικού περιεχομένου με το μαθηματικό και το φυσικό περιεχόμενο, και κάποιοι καλλιτέχνες ζητούσαν λεπτομερείς εξηγήσεις σχετικά με το άρθρο το οποίο αναλάμβαναν να εικονογραφήσουν. Ιδιαίτερα προς στα τέλη της δεκαετίας του 1980 (με επικεφαλής του Τμήματος Εικονογράφησης

τον Sergei Ivanov), το *Kvant* περιλάμβανε κορυφαίας κλάσης δείγματα γραφιστικής τέχνης. Ελπίζω κάποια στιγμή να γίνει δυνατό να διοργανωθεί μια έκθεση της τέχνης του *Kvant* σε κάποια Ετήσια Σύνοδο της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Μερικές φορές, η τέχνη του *Kvant* είχε και ένα προσωπικό στοιχείο. Ιδού ένα σχετικό παράδειγμα. Στον επόμενο τόμο αυτής της σειράς θα βρείτε το άρθρο του V. Onsienko «Περί του μεγάλου αριθμού του Denogardus και του νόμου του Hooke». Το συγκεκριμένο άρθρο, το θέμα του οποίου είναι η θεωρία του Sturm για τις δευτεροβάθμιες διαφορικές εξισώσεις, είναι γραμμένο ως αφήγηση για τη ζωή ενός φανταστικού ιστορικού προσώπου: ο κύριος χαρακτήρας είναι ένας λόγιος του Μεσαίωνα ονόματι Denogardus, το έργο της ζωής του οποίου ρίχτηκε στην πυρά από την Ιερά Εξέταση (ευτυχώς, ο όγκος του χειρογράφου απέτρεψε την καταστροφή του). Το άρθρο εικονογραφείται με δύο σελίδες από το βιβλίο του Denogardus (καμμένες στις άκρες): η μία είναι ένα πορτραίτο του συγγραφέα ενώ επιδίδεται σε αστρονομικές μετρήσεις. Με μια προσεκτική ματιά διαπιστώνει κανείς ότι ο Denogardus έχει πολλά κοινά φυσιογνωμικά χαρακτηριστικά με τον V. Arnold, διάσημο Ρώσο μαθηματικό και συντάκτη άρθρων του *Kvant*.

Καθένα από τα τεύχη του *Kvant* (τα οποία είχαν αρχικά έκταση 64 σελίδες, και αργότερα 80 σελίδες) περιλάμβανε συνήθως τέσσερα κύρια άρθρα, δύο στη φυσική και δύο στα μαθηματικά: υπήρχαν επίσης ένα ή δύο μικρότερα άρθρα με τίτλο «Εργαστήριο φυσικής» ή «Μαθηματικός κύκλος». Σε κάθε τεύχος υπήρχε μια Γωνιά προβλημάτων (το τμήμα του περιοδικού που στη συνέχεια του κειμένου αποκαλούμε Βιβλίο Προβλημάτων του *Kvant*): πέντε προβλήματα μαθηματικών και πέντε προβλήματα φυσικής: οι λύσεις τους θα δημοσιεύονταν μερικούς μήνες αργότερα. Από τη δεκαετία του 1980 και έπειτα, το *Kvant* δημοσιεύει άρθρα και προβλήματα πάνω στην επιστήμη υπολογιστών. Ένα σημαντικό τμήμα του περιοδικού ήταν αφιερωμένο σε ύλη προετοιμασίας για τις εισαγωγικές εξετάσεις στα πανεπιστήμια: η ύλη αυτή περιλάμβανε άρθρα πάνω σε θέματα του προγράμματος διδασκαλίας του λυκείου και προβλήματα από τις εισαγωγικές εξετάσεις της προηγούμενης χρονιάς στα πανεπιστήμια ολόκληρης της χώρας. Ένα άλλο τμήμα, κάτι σαν περιοδικό μέσα στο περιοδικό, που ονομαζόταν «*Kvant* για μαθητές του δημοτικού» (αν και δεν πρέπει να πάρει κανείς την ονομασία αυτή τοις μετρητοίς: η ύλη συχνά ήταν πολύ υψηλού επιπέδου!), αποτελούνταν από ένα μικρό άρθρο και μια Γωνιά προβλημάτων. Ας δούμε δύο ενδεικτικά προβλήματα:

Ο πληθυσμός της Σοβιετικής Ένωσης είναι περίπου 250 εκατομμύρια. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει αρκετός χώρος για 250 ανθρώπους σε έναν χάρτη της Σοβιετικής Ένωσης σε κλίμακα 1 : 1.000.000.

Ρίχνουμε ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ κατευθείαν προς τα πάνω. Ποιος είναι μεγαλύτερος, ο χρόνος ανόδου ή ο χρόνος καθόδου;

Στο περιοδικό υπήρχαν επίσης πολλές μικρότερες ενότητες: μαθηματικά παιχνίδια, σελίδα σκακιού, γράμματα αναγνωστών, παρουσιάσεις βιβλίων κ.λπ. Κάθε τεύχος του *Kvant* περιείχε 50-100 μαθηματικά προβλήματα διαφόρων επιπέδων δυσκολίας, με ή χωρίς λύσεις. Κατά καιρούς εμφανίζονταν επίσης συνεντεύξεις με επιφανείς μαθηματικούς και φυσικούς, όπως για παράδειγμα με τους V. Arnold, I. Gelfand, A. Kolmogorov, S. Novikov, R. Graham.

Το *Kvant* δημοσίευε επίσης πολλές πληροφορίες για θερινά σχολεία, σχολεία εξ αποστάσεως, ολυμπιάδες και διαγωνισμούς, τοπικούς, εθνικούς και διεθνείς. Σε κάποιο τεύχος δημοσιεύτηκε ένα άρθρο για τους μαθηματικούς οι οποίοι έχουν τιμηθεί με το Μετάλλιο Fields, με σύντομες βιογραφίες και φωτογραφίες τους. Στο τέλος του άρθρου εκφραζόταν η ευχή μια μέρα ένας αναγνώστης και συντάκτης άρθρων του *Kvant* να κατακτήσει το Μετάλλιο Fields· η ευχή αυτή πραγματοποιήθηκε το 1998, όταν το Μετάλλιο απονεμήθηκε στο M. Kontsevich.

Η παρούσα συλλογή αποτελείται από μεταφράσεις επιλεγμένων κύριων μαθηματικών άρθρων. Τα άρθρα αυτά κάλυπταν μια μεγάλη ποικιλία θεμάτων, αλλά ήταν όλα επικεντρωμένα στην εννοιολογική παρουσίαση, μη τεχνικά και αποτελούσαν μια ουσιαστική εισαγωγή στο θέμα που πραγματεύονταν (κάτι σαν μια καλή παρουσίαση σε ένα colloquium). Οι συντάκτες των άρθρων δεν αισθάνονταν υποχρεωμένοι να παραμείνουν μέσα στα πλαίσια κάποιας συγκεκριμένης διδακτέας ύλης (υπέθεταν μόνο ότι ο αναγνώστης ήταν εξοικειωμένος με την καθιερωμένη ύλη των μαθηματικών και της φυσικής του λυκείου· ωστόσο, ήταν πολύ συνηθισμένο να παραπέμπουν σε άλλα άρθρα του *Kvant*), και αυτό τους επέτρεπε συχνά να καλύπτουν πολύ περισσότερη ύλη απ' ό,τι ένα συστηματικό μάθημα, παραλείποντας τις τεχνικές λεπτομέρειες.

Πολλά από τα κύρια άρθρα αφορούσαν κλασικά μαθηματικά διαμάντια, κάποια από τα οποία αποτελούν ή αποτελούσαν τμήματα του πανεπιστημιακού προγράμματος: θεωρήματα του Pascal και του Brianchon στην προβολική γεωμετρία· εξειλιγμένες και ενειλγμένες επίπεδων καμπυλών· κατανομή των πρώτων αριθμών· γεωμετρία των αναπτυκτών επιφανειών· δυνατές και αδύνατες κατασκευές με κανόνα και διαβήτη· αριθμητική των κυβικών καμπυλών· απόδειξη της «μηδενικής βαρύτητας στο εσωτερικό κοιλότητας» από τον Νεύτωνα· πολυώνυμα Chebyshev· θεώρημα Gauss-Bonnet – για να αναφέρουμε λίγα από αυτά. Κλασικά αποτελέσματα συνδέονταν, όταν αυτό ήταν δυνατό, με σύγχρονα μαθηματικά, λόγου χάριν η θεωρία αναπτυκτών επιφανειών του Euler με τη σύγχρονη θεωρία ιδιαζόντων σημείων (στο άρθρο του D. Fuchs, «Γεωμετρία με φύλλα χαρτιού»).

Άλλα άρθρα πραγματεύονταν τα μαθηματικά του 20ού αιώνα, που μερικές φορές αφορούσαν έρευνα αιχμής. Ίδου μερικά παραδείγματα: αναλλοίωτη του Dehn και τρίτο πρόβλημα του Hilbert· εύκαμπτα πολύγωνα· μετατιθέμενα πολυώνυμα και ρητές συναρτήσεις· γεωμετρία και δυναμική του μαθηματικού μπιλιάρδου· πολυώνυμο κόμβων και συνδέσμων Jones· ταυτότητες του Euler, του Gauss και του MacDonald· ημικρύσταλλοι· πλεγματικά σημεία σε πολύεδρα. Κάποια από τα άρθρα περιλάμβαναν πρωτότυπα μαθηματικά αποτελέσματα. Πολλά κύρια άρθρα ήταν βιογραφικά και ιστορικά· κάποιο ήταν αφιερωμένο στα μέτρα της ρωσικής ποίησης, και ένα άλλο στα μαθηματικά μοτίβα στην τέχνη του M. Escher.

Πόσα από αυτά μπορούσε να κατανοήσει και να αφομοιώσει ένας τυπικός αναγνώστης; Πιθανότατα όχι όλα, ή τουλάχιστον όχι από την πρώτη ανάγνωση – αλλά υποτίθεται ότι κανείς επανερχόταν στα δύσκολα άρθρα περισσότερες από μία φορές. Ωστόσο, πιστεύω ότι οι αναγνώστες αποκόμιζαν τα εξής διδάγματα: τα μαθηματικά είναι ενιαία, και όχι κατακερματισμένα σε πολλά ασύνδετα κομμάτια· τα μαθηματικά είναι όμορφα· οι θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες είναι απλές· ένα διδακτικό παράδειγμα αξίζει όσο μια αφηρημένη γενική θεωρία· και μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις. Ένα ακόμα δίδαγμα που αποκόμιζε κανείς ήταν ότι δεν ήταν αναγκαίο να περιμένει να φτάσει στις μεταπτυχιακές σπουδές για να ξεκινήσει έρευνα στα μαθηματικά· μάλιστα, μπορούσε να ξεκινήσει ακόμα και στο λύκειο (και πράγματι, οι Ρώσοι σπουδαστές αρχίζουν ανεξάρτητη έρευνα αρκετά νωρίτερα από τους σπουδαστές στη Δύση).

Λίγα λόγια για τους συντάκτες άρθρων του *Kvant*. Κάποιοι από αυτούς είναι ερευνητές μαθηματικοί ή φυσικοί, και κάποιοι είναι επαγγελματίες δάσκαλοι· σε κάποιες περιπτώσεις ένας συντάκτης είναι φοιτητής πανεπιστημίου ή και απλός αναγνώστης. Πολλοί διάσημοι μαθηματικοί αρθρογραφούσαν τακτικά στο *Kvant*. Μερικά ενδεικτικά γνωστά ονόματα είναι τα εξής: A. Aleksandrov, P. Aleksandrov, V. Arnold, I. Bernstein, V. Boltyanskii, A. Fomenko, D. Fuchs, S. Gindikin, A. Katok, A. Kirillov, A. Kolmogorov, M. Krein, Yu. Matiyasevich, L. Pontryagin, V. Tikhomirov, N. Vilenkin (δεν υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί που θα μπορούσαν να καυχηθούν ότι διαβάζονται από εκατό χιλιάδες αναγνώστες!).

Τέλος, θα ήθελα να αποτίσω φόρο τιμής στο πρόσωπο που, για μένα, ενσαρκώνει το *Kvant* περισσότερο από κάθε άλλο. Πρόκειται για τον Nikolai Vasil'ev, ο οποίος έφυγε από τη ζωή πρόωρα το 1998 (ο αναγνώστης αυτής της συλλογής θα συναντήσει το όνομά του περισσότερες από μία φορές). Ήταν με το *Kvant* από την πρώτη μέρα της ύπαρξής του. Ολοκληρωμένος μαθηματικός, πιθανότατα δημοσίευσε στο *Kvant* περισσότερα άρθρα από κάθε άλλο μεμονωμένο συντάκτη. Ήταν μέλος της Συντακτικής Επιτροπής, και από το 1970 υπεύθυνος για το Βιβλίο Προβλημάτων του *Kvant*. Λόγω του εξαιρετικού του

γούστου και της μεγάλης μαθηματικής του ευρυμάθειας, αυτό το Βιβλίο Προβλημάτων έγινε μία από τις καλύτερες συλλογές μαθηματικών προβλημάτων όλων των εποχών (εφάμιλλη εκείνης του «American Mathematical Monthly»: ελπίζω στο μέλλον να συμπεριληφθούν σε αυτή τη σειρά μεταφράσεων κάποια επιλεγμένα μαθηματικά προβλήματα από το *Kvant* μαζί με τις λύσεις τους). Χωρίς ανθρώπους σαν τον N. Vasil'ev, το *Kvant* δεν θα είχε υπάρξει.

Serge Tabachnikov

