

Πρόλογος στην ελληνική έκδοση

Το παρόν κείμενο έρχεται να προσθέσει κάποιες σκέψεις στα δύο πολύ ενδιαφέροντα κείμενα που ακολουθούν, δηλαδή στον «Πρόλογο στη ρωσική έκδοση» και τον «Πρόλογο» (στην αμερικανική έκδοση) που έγραψε ο Mark Saul, τα οποία συνιστούμε θερμά στον αναγνώστη να διαβάσει με προσοχή.

Διότι μόνον έτσι θα καταλάβει πώς προέκυψε ο θεσμός των «Μαθηματικών Κύκλων» μέσα από μια συγκεκριμένη εκπαιδευτική λογική για τη μαθηματική παιδεία στην τότε ΕΣΣΔ. Αλλά και γιατί η American Mathematical Society (AMS), επιλέγοντας να εκδώσει αυτό το βιβλίο στα αγγλικά, το μακρινό 1996, ξεκίνησε ένα πείραμα που αφορούσε τη «μετεμφύτευση» στην αμερικανική μαθηματική κουλτούρα ενός θεσμού που προερχόταν από μια άλλη μαθηματική παράδοση. Ενός θεσμού του οποίου η λειτουργία στην Αμερική «υποστηρίχθηκε», στην αρχή, κυρίως από Ρώσους και Ανατολικοευρωπαίους (π.χ. Ούγγρους και Ρουμάνους) μαθηματικούς οι οποίοι μετά το τέλος του Ψυχρού Πολέμου μετακινήθηκαν στις ΗΠΑ και δίδαξαν σε αμερικανικά πανεπιστήμια, αλλά και από κάποιους Αμερικανούς εκπαιδευτικούς που είχαν πρωτοποριακές αντιλήψεις για το είδος και τους σκοπούς της μαθηματικής παιδείας στην πατρίδα τους –η οποία είναι σήμερα ηγέτιδα δύναμη στην επιστημονική και τεχνολογική ανάπτυξη παγκοσμίως–, οπότε είδαν το όλο θέμα με εξαιρετικό ενδιαφέρον. Περίπου 30 χρόνια μετά την έκδοση του ανά χείρας βιβλίου στα αγγλικά, στις ΗΠΑ ο θεσμός των «Μαθηματικών Κύκλων» έχει γνωρίσει εντυπωσιακή ανάπτυξη. Αν ρίξει κανείς, π.χ., μια ματιά στα βιβλία της σειράς «MSRI Mathematical Circles» της AMS, θα διαπιστώσει ότι αρκετά από αυτά δεν αποτελούν μεταφράσεις από τα ρωσικά αλλά έχουν γραφεί απευθείας στα αγγλικά και περιλαμβάνουν εξαιρετικής ποιότητας μαθηματική ύλη που αποτέλεσε αντικείμενο διδασκαλίας σε «Μαθηματικούς Κύκλους» σε διάφορα μέρη των ΗΠΑ. Ανάμεσα σε αυτά είναι και το δίτομο έργο των Zvezdelina Stankova και Tom Rike (επιμ.), *A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience, Volume I* (AMS, 2008) και *A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience, Volume II* (AMS, 2014), γεγονός που δεν εκπλήσσει αφού ο θεσμός των «Μαθηματικών Κύκλων» γνωρίζει ιδιαίτερη άνθηση στην Καλιφόρνια. Από πλευράς μου θα ήθελα να προσθέσω, στη συνέχεια, δύο

παραμέτρους που θεωρώ κρίσιμες για την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας αυτού του θεσμού, οπότε και για την αξία του παρόντος βιβλίου.

Πρώτον, στους «Μαθηματικούς Κύκλους» στην τότε ΕΣΣΔ δεν είχαν πρόσβαση μόνον οι ταλαντούχοι στα Μαθηματικά μαθητές αλλά, αντιθέτως, είχε πρόσβαση όποιος το επιθυμούσε. Οι ταλαντούχοι «προέκυπταν» στην πορεία, μέσα από τη μαθηματική εκπαίδευση που έπαιρναν όσες και όσοι ήθελαν, χάρη στις διαλέξεις, τους μαθηματικούς διαγωνισμούς και τις συζητήσεις που διοργανώνονταν στο πλαίσιο των «Μαθηματικών Κύκλων». Όπως τονίζει ο André Toom στη βιβλιοκρισία που έγραψε για το ανά χείρας βιβλίο και δημοσιεύθηκε στο ακαδημαϊκό περιοδικό *The American Mathematical Monthly* (1997, τεύχος 104:5, σελ. 468-471), στους ρωσικούς «Μαθηματικούς Κύκλους» δεν γινόταν κάποιο είδος επιλογής –και αυτή είναι η ειδοποιός διαφορά με τους «Μαθηματικούς Κύκλους» που διοργανώνονται σήμερα στις ΗΠΑ–, καθώς μπορούσε να συμμετάσχει σε αυτούς ο καθένας. Και συνεχίζει ως εξής: «Έτσι έκανα ο ίδιος σαράντα χρόνια πριν. Απλώς, πήρα το τρόλεϋ, πήγα στην παλαιά πανεπιστημιούπολη στο κέντρο της Μόσχας και άρχισα να παρακολουθώ ‘ανεπίσημες’ τάξεις στις οποίες δίδασκαν φοιτητές του Πανεπιστημίου της Μόσχας. Δεν υπέβαλα ‘επίσημη’ αίτηση, δεν πλήρωσα δίδακτρα, δεν βαθμολογήθηκα, όμως εκεί έγινα επαγγελματίας μαθηματικός» (ό.π., σελ. 468-469).

Η πρώτη αυτή παράμετρος, την οποία μόλις επεσήμανα, έχει τη σημασία της για την ύλη του παρόντος βιβλίου. Το βιβλίο αποτελεί μια εξαιρετική συλλογή προβλημάτων αλλά ταυτόχρονα περιέχει και σημαντικές «οδηγίες» για όσους θα τα διδάξουν. Κανονικά, οι «Μαθηματικοί Κύκλοι» που έχετε μπροστά σας απευθύνονται σε μαθητές ηλικίας 12-14 ετών, όμως, όπως παρατηρεί και ο André Toom (σελ. 470), το βιβλίο μπορεί να διαβαστεί από αναγνώστες οποιασδήποτε ηλικίας. Σκοπός του είναι να πάρει τον αναγνώστη από το χέρι και, μέσα από μια σειρά προβλημάτων, που ξεκινούν από απλούς γρίφους και φτάνουν μέχρι πολύ δύσκολα μαθηματικά προβλήματα, να τους μάθει πριν απ’ όλα να σκέπτονται «αυτονόμως» και δημιουργικά, δηλαδή να χρησιμοποιούν τις θεωρητικές τους γνώσεις για να προσπαθήσουν να λύσουν προβλήματα «μη καθιερωμένου τύπου» ή αλλιώς «μη τετριμμένα προβλήματα» (συνήθως προβλήματα «Μαθηματικών Ολυμπιάδων» και λοιπών μαθηματικών διαγωνισμών, γραπτών ή προφορικών).

Είναι χαρακτηριστική η διαφωνία του Toom ακόμα και με τους συγγραφείς του βιβλίου, οι οποίοι θεωρούν ότι το αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή το «Κεφάλαιο 0», που περιλαμβάνει προβλήματα τα οποία απευθύνονται σε μαθητές 10-11 ετών, δεν έχει κατ’ ουσία μαθηματικό περιεχόμενο. Χαρακτηρίζει αφελή αυτόν τον ισχυρισμό, καθώς πιστεύει ότι η επίλυση των προβλημάτων αυτού του κεφαλαίου «προϋποθέτει την πιο θεμελιώδη ικανότητα, την ικανότητα για αφαιρετική σκέψη» (ό.π., σελ. 471).

Μάλιστα, δίνει ως παράδειγμα το πρώτο πρόβλημα του «Κεφαλαίου 0», το οποίο έχει ως εξής: «Ένας αριθμός βακτηρίων τοποθετούνται σε έναν δοκιμαστικό σωλήνα. Ένα δευτερόλεπτο αργότερα το κάθε βακτήριο διαιρείται σε δύο βακτήρια, στο επόμενο δευτερόλεπτο καθένα από τα βακτήρια που έχουν προκύψει διαιρείται και πάλι σε δύο, κ.λπ. Μετά από ένα λεπτό, ο σωλήνας έχει γεμίσει. Πότε ήταν ακριβώς μισογεμάτος;».

Η απάντηση έχει ως εξής: Αν σκεφτούμε αντίστροφα, καταλαβαίνουμε ότι, αν ο σωλήνας είναι γεμάτος μετά από 60 δευτερόλεπτα, θα πρέπει να είναι μισογεμάτος ένα δευτερόλεπτο νωρίτερα. Δηλαδή, μετά από 59 δευτερόλεπτα.

Εντούτοις, όπως σημειώνει ο Toom στη βιβλιοκρισία του, ορισμένοι μαθητές απαντούν ότι μισογεμάτος θα είναι ο σωλήνας μετά από μισό λεπτό, εκλαμβάνοντας, συνειδητά η ασύνειδα, την αύξηση ως γραμμική. Κι όμως, λέει ο Toom, αυτό το πρόβλημα δείχνει πόσο πολύ διαφέρει η εκθετική αύξηση από τη γραμμική.

Αναφερόμενος, τώρα, στη δομή που έχουν οι ενότητες των προβλημάτων και στον τρόπο που πρέπει ο διδάσκων να χρησιμοποιεί τα προβλήματα για να μεγιστοποιεί την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας του, ο Toom επιστράτη την προσοχή μας σε μια πολύ σημαντική, κατά την άποψή του, έννοια, την οποία αποκαλεί «μεταφορά της εξάσκησης» (transfer of training): «Ας φανταστούμε το σύνολο όλων των πιθανών προβλημάτων ενός κλάδου των Μαθηματικών ως έναν μετρικό χώρο. Κάθε χωριστό πρόβλημα είναι ένα σημείο αυτού του χώρου και όμοια προβλήματα βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο. Συζητώντας ένα πρόβλημα με τους μαθητές μας, καλύπτουμε μια σφαίρα στην οποία το κέντρο βρίσκεται το πρόβλημα, ενώ η ακτίνα της ισούται με την ικανότητα των μαθητών μας να μεταφέρουν την εξάσκηση από αυτό το πρόβλημα σε όμοια προβλήματα. Ο σκοπός μας είναι να καλύψουμε τον μέγιστο δυνατό χώρο με αυτές τις σφαίρες. Είναι η μεταφορά της εξάσκησης δυνατή; Για τους συγγραφείς των *Κύκλων*, για μένα, και για όλους όσοι έχουμε διδάξει με αυτό τον τρόπο, η απάντηση είναι προφανής: “Ναι, φυσικά, η μεταφορά της εξάσκησης είναι δυνατή και συνδέεται στενά με μια άλλη πολύτιμη ανθρώπινη ικανότητα, τη *γενίκευση*”» (ό.π., σελ. 469). Σε αυτή την παράγραφο συμπυκνώνεται παραστατικά και μάλλον πλήρως η όλη λογική του τρόπου διδασκαλίας των προβλημάτων στο πλαίσιο των «Μαθηματικών Κύκλων».

Περνώ, ακολούθως, στη δεύτερη και τελευταία παράμετρο την οποία επιθυμώ να θίξω σε αυτό το κείμενο. Αφορά την επιλογή του παρόντος βιβλίου ως του δεύτερου σε μια σειρά βιβλίων που θέλουμε, με την αμέριστη βοήθεια των «Εκδόσεων Εφαλτήριο», να δημιουργήσουμε, ώστε να υπάρχει στη γλώσσα μας η απαραίτητη μαθηματική ύλη για τους «Μαθηματικούς Κύκλους» που ήδη λειτουργούν ή μέλλει να λειτουργήσουν στη χώρα μας. Αναγνωρίζουμε ότι, χάρη στο εξαιρετικό έργο της *Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας* (ΕΜΕ)

–βλ., π.χ., το προσφάτως εκδοθέν, υπέροχο βιβλίο των Αργύρη Φελλούρη και Ευάγγελου Ψύχα (ενός από τους λαμπρότερους γεωμέτρους, ο οποίος δυστυχώς «έφυγε» πρόωρα), *Γεωμετρία για μαθηματικούς διαγωνισμούς, Τόμος Α* (ΕΜΕ, 2022)–, αλλά και πολλών άξιων μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι έγραψαν βιβλία που αποτελούν σημαντικές συλλογές προβλημάτων, η ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία κάθε άλλο παρά «φτωχή» είναι στον συγκεκριμένο τομέα.

Αποτελεί πεποίθησή μας, όμως, ότι απαιτούνται, αφενός, βιβλία όπως το παρόν, που συνιστά όχι απλώς μια εξαιρετική συλλογή προβλημάτων αλλά και μια έμπρακτη «υπόδειξη» του τρόπου διδασκαλίας τους, και, αφετέρου, πονήματα, όπως το πρώτο αυτής της σειράς, του Serge Tabachnikov (επιμ.) *Kvant Selecta: Άλγεβρα και Ανάλυση* (εκδόσεις Εφαλτήριο, 2022), το οποίο περιέχει εξαιρετικά άρθρα τα οποία πρωτοδημοσιεύθηκαν στο ρωσικό περιοδικό *Kvant* (και αργότερα μεταφράστηκαν και εκδόθηκαν και στα αγγλικά, από την AMS).

Κλείνοντας, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον αδελφικό φίλο και λαμπρό μαθηματικό, Πέτρο Μπρέγιαννη, για τον πνευματικό μόχθο του κατά την επιστημονική επιμέλεια αυτού του βιβλίου. Την τελευταία την αναλάβαμε, με μεγάλο ενθουσιασμό, από κοινού, όμως η δική του συμβολή στο τελικώς παραχθέν προϊόν υπήρξε μεγαλύτερη από τη δική μου (από τις σημειώσεις των επιμελητών –Σ.τ.Ε.– οι περισσότερες είναι δικές του). Και οι δυο μας, βέβαια, επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε πολύ, πριν απ’ όλους τον εκδότη, Γιάννη Παπαδόγγο, διδάκτορα φυσικής και πολύπειρο επιμελητή πανεπιστημιακών συγγραμμάτων στις θετικές επιστήμες. Ακολουθώντας, οι ευχαριστίες πηγαινούν στους ανθρώπους της οικογενείας μας που στήριξαν ποικιλοτρόπως αυτό το εκδοτικό εγχείρημά μας. Έτσι, είμαι ευγνώμων στη γυναίκα μου, Ευαγγελία, για όσα ανέλαβε να κάνει προς όφελος όλης της οικογένειάς μας σε αυτό το χρονικό διάστημα (απαλλάσσοντάς με από πλήθος υποχρεώσεων που, κανονικά, μου «αναλογούσαν»), ενώ ο Πέτρος ευχαριστεί για τον ίδιο ακριβώς λόγο τους γονείς του, Ασημένια και Κωνσταντίνο. Στον πατέρα του, Κωνσταντίνο, όμως, που είναι μαθηματικός, οφείλουμε τόσο ο Πέτρος, όσο και ο υπογράφων, ευχαριστίες και για έναν επιπρόσθετο λόγο: διότι διάβασε μεγάλα τμήματα αυτού του βιβλίου και έκανε διορθώσεις τόσο ουσίας, όσο και τυπογραφικές.

Μακάρι αυτό το βιβλίο να είναι εύπλοο, ώστε να καθοδηγήσει στα ωραία –παρότι ενίοτε δύσβατα– μονοπάτια των Μαθηματικών πολλά ανήσυχα νεαρά μυαλά, βοηθώντας συγχρόνως και τους δασκάλους τους στο έργο τους.

Γιώργος Α. Ευαγγελόπουλος
Νέα Μάκρη, 29 Νοεμβρίου 2022