ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικό κεφάλαιο

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά εξηγούμε προαπαιτούμενα και συμβολισμούς που θα ακολουθηθούν. Έπειτα, αναφερόμαστε στην αρχή της πεπερασμένης μαθηματικής επαγωγής και, συνοπτικά, στη διαιρετότητα στο σύνολο των ακεραίων και στην έννοια της απεικόνισης συνόλων, ύλη η οποία είναι απαραίτητη για τα επόμενα κεφάλαια.

Προαπαιτούμενα και συμβολισμοί

Θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής συμβολισμούς:

$\emptyset$: το κενό σύνολο
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{Z}$: το σύνολο των ακεραίων
$\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$: το σύνολο των θετικών ακεραίων
$\mathbb{Q}$: το σύνολο των ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$: το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$: το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
$[n]$: το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$,

όπου $[0] := \emptyset$.

Θεωρούμε γνωστές στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας συνόλων, όπως εκείνες του υποσυνόλου, της ένωσης, της τομής και του καρτεσιανού γινομένου (πεπερασμένου πλήθους) συνόλων. Γράφουμε $x \in A$ αν το x ανήκει στο σύνολο A, και $x \notin A$ διαφορετικά, $A \subseteq B$ αν το σύνολο A περιέχεται στο σύνολο B (οπότε το A είναι υποσύνολο του B), και $A \subset B$ όταν $A \subseteq B$ και αποκλείεται η ισότητα (οπότε το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B). Συμβολίζουμε με $A \cup B$ την ένωση των συνόλων A και B, με $A \cap B$ την τομή τους, με $A \setminus B$ ή $A - B$ τη διαφορά $\{x \in A : x \notin B\}$ του συνόλου B από το σύνολο A, με 2^X το σύνολο όλων των υποσυνόλων (δυναμοσύνολο) του συνόλου X και με $A \times B = \{(x, y) : x \in A, \, y \in B\}$ το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B.

Θεωρούμε επίσης ότι ο αναγνώστης γνωρίζει βασικές ιδιότητες του διατεταγμένου σώματος των πραγματικών αριθμών και του σώματος των μιγαδικών αριθμών, και (περιστασιακά) ότι είναι εξοικειωμένος με τα πολυώνυμα και τις πράξεις τους και διαθέτει κάποιες βασικές γνώσεις απειροστικού λογισμού.

1.1 Φυσικοί αριθμοί

Για την καλύτερη δυνατή προετοιμασία για τα επόμενα κεφάλαια, στην ενότητα αυτή αναφερόμαστε σε βασικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών, δίνοντας έμφαση στη μέθοδο της επαγωγής. Θεωρούμε γνωστή την κατασκευή των φυσικών αριθμών (βλ., για παράδειγμα, [10, 3]) από τη θεωρία συνόλων. Για τον αναγνώστη που δεν έχει εξειδικευμένες γνώσεις σε αυτό το θέμα, για το βιβλίο αυτό αρκεί η ικανοποιητική διαίσθηση.

1.1.1 Μαθηματική επαγωγή

Η αρχή της πεπερασμένης μαθηματικής επαγωγής, την οποία παραθέτουμε σε δύο της μορφές, είναι ισοδύναμη με την αρχή του ελαχίστου για τους φυσικούς αριθμούς. Αποτελεί την κύρια αποδεικτική μέθοδο που εφαρμόζεται στο βιβλίο αυτό και μια ιδιαίτερα σημαντική και χρήσιμη αποδεικτική μέθοδο σε όλο το φάσμα των μαθηματικών γενικότερα.

Πρόταση 1.1.1 *Έστω* $S \subseteq \mathbb{N}$.

(α) (Αρχή του Ελαχίστου) *Αν* $S \neq \emptyset$*, τότε το* S *έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει* $a \in S$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $a \leq x$ *για κάθε* $x \in S$.

(β) (Αρχή της Πεπερασμένης Επαγωγής, πρώτη μορφή) *Αν ισχύουν*

- $0 \in S$ *και*
- $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$.

(γ) (Αρχή της Πεπερασμένης Επαγωγής, δεύτερη μορφή) *Αν ισχύουν*

- $0 \in S$ *και*
- $0, 1, \ldots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$.

Ακολούθως, δίνουμε ενδεικτικά κάποιες εφαρμογές της Πρότασης 1.1.1, αρχίζοντας από τις απλούστερες και βαίνοντας προς τις πιο σύνθετες. Περισσότερες εφαρμογές εμφανίζονται στις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου και στη συνέχεια του βιβλίου.

Παράδειγμα 1.1.1 Θα δείξουμε ότι κάθε θετικός ακέραιος n μπορεί να γραφεί στη μορφή $n = 2^k \cdot q$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και περιττό θετικό ακέραιο q (μάλιστα, η παράσταση αυτή είναι μοναδική).

Θα εφαρμόσουμε την αρχή του ελαχίστου. Συμβολίζουμε με S το σύνολο των θετικών ακεραίων που δεν γράφονται στη μορφή αυτή και υποθέτουμε ότι $S \neq \emptyset$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (α), το S έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το a. Αφού κάθε περιττός θετικός ακέραιος n γράφεται στην εν λόγω μορφή ως $n = 2^0 \cdot q$ με $q = n$, άρα δεν ανήκει στο S, έχουμε $a = 2b$ για κάποιο $b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αφού $b < a$ και το a είναι το ελάχιστο στοιχείο του S, έχουμε $b \notin S$. Αυτό σημαίνει ότι $b = 2^k \cdot q$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και κάποιο περιττό $q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Κατά συνέπεια, $a = 2^{k+1} \cdot q \notin S$, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι $a \in S$. Από την αντίφαση αυτή οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $S = \emptyset$, που ήταν το ζητούμενο. $\square$

Το άθροισμα και το γινόμενο μιγαδικών αριθμών (γενικότερα, για τους αναγνώστες που έχουν τις σχετικές γνώσεις, στοιχείων ενός δακτυλίου με μονάδα, όπως πολυώνυμα) $a_1, a_2, \dots, a_n$ ορίζονται αναδρομικά από τις ισότητες

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \;=\; \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 0 \\ (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \,+\, a_n, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

και

$$a_1 a_2 \cdots a_n \;=\; \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n, & \text{αν } n \geq 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

αντίστοιχα. Οι ορισμοί αυτοί υποδεικνύουν ότι η μαθηματική επαγωγή αποτελεί ιδανική μέθοδο για την απόδειξη προτάσεων που αφορούν το άθροισμα ή το γινόμενο τυχαίου πλήθους μιγαδικών αριθμών. Στο βιβλίο αυτό θα χρησιμοποιούμε συχνά τους συμβολισμούς

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{και} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \;=\; a_1 a_2 \cdots a_n \,.$$

Για παράδειγμα,

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) \;=\; 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) \quad \text{και} \quad \prod_{i=1}^{n} i^2 \;=\; 1^2 \cdot 2^2 \,\cdots\, n^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δυο βασικές ιδιότητες του αθροίσματος περιγράφονται στην Άσκηση 4.

Παράδειγμα 1.1.2 Θα δείξουμε ότι

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \;\geq\; 1 \,+\, (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \tag{1.3}$$

για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ (η ανισότητα αυτή είναι γνωστή ως *ανισότητα του Weierstrass*).

Θα εφαρμόσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, με τη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (β). Έστω S το σύνολο των αριθμών $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους η (1.3) ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$. Αφού η (1.3) ισχύει ως ισότητα για $n = 0$ και για $n = 1$, έχουμε $0 \in S$ και $1 \in S$. Υποθέτουμε ότι $k \in S$ και θεωρούμε $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \geq 0$. Από την υπόθεσή μας, γνωρίζουμε ότι

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + a_i) \ \geq \ 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη αυτής της ανισότητας με $1 + a_{k+1}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1}(1 + a_i) \ &= \ \prod_{i=1}^{k}(1 + a_i) \cdot (1 + a_{k+1}) \\
&\geq \ (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\
&= \ 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)a_{k+1} \\
&\geq \ 1 \ + \ (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})
\end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι η πρόταση ισχύει και για το $n = k + 1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β) έχουμε $S = \mathbb{N}$, δηλαδή η αρχική μας πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Παρατηρηση. Μια προσεκτική εξέταση της προηγούμενης απόδειξης δείχνει ότι η ανισότητα (1.3) ισχύει και για πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ με $-1 \leq a_i \leq 0$ για κάθε $i \in [n]$.

Παράδειγμα 1.1.3 Ας αποδείξουμε την ταυτότητα

$$a^n - 1 \ = \ (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) \tag{1.4}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n και κάθε $a \in \mathbb{C}$ (η απόδειξη που θα δώσουμε ισχύει για στοιχείο a τυχαίου δακτυλίου).

Παρατηρούμε ότι η (1.4) είναι τετριμμένη για $n = 1$ και υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k \in \mathbb{Z}_{>0}$, δηλαδή ότι

$$a^k - 1 \ = \ (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1).$$

Προσθέτοντας το $a^{k+1} - a^k$ στα δύο μέλη αυτής της ισότητας, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
a^{k+1} - 1 \ &= \ a^{k+1} - a^k \ + \ a^k - 1 \\
&= \ a^{k+1} - a^k \ + \ (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1) \\
&= \ (a - 1)a^k \ + \ (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1) \\
&= \ (a - 1)(a^k + a^{k-1} + \cdots + a + 1)
\end{aligned}$$

και συνεπώς η (1.4) ισχύει και για $n = k + 1$.

Αν συμβολίσουμε με S το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους η (1.4) ισχύει και για το $n+1$, δείξαμε ότι $0 \in S$ και ότι $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β), έχουμε $S = \mathbb{N}$, δηλαδή η (1.4) ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. $\square$

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, για να αποδείξουμε με τη μέθοδο της επαγωγής ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα απαιτούνται δύο βήματα. Ορίζοντας ως S το σύνολο των φυσικών αριθμών που έχουν αυτή την ιδιότητα, στο πρώτο (συνήθως το ευκολότερο) βήμα επαληθεύουμε ότι $0 \in S$, δηλαδή ότι το μηδέν έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Στο δεύτερο (το λεγόμενο επαγωγικό) βήμα, αποδεικνύουμε τη συνεπαγωγή $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$, ή την $0, 1, \dots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$. Δηλαδή, υποθέτοντας ότι το k, ή ότι καθένα από τα $0, 1, \dots, k$, έχει την επιθυμητή ιδιότητα (υπόθεση της επαγωγής), αποδεικνύουμε ότι το $k+1$ επίσης έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Επισημαίνουμε ότι το πρώτο βήμα είναι εξίσου απαραίτητο με το δεύτερο. Για παράδειγμα, αν S είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών n με την ιδιότητα $n = n+1$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$. Έτσι, η παράλειψη του πρώτου βήματος οδηγεί στην (εσφαλμένη) απόδειξη ότι $n = n+1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Στο Παράδειγμα 1.1.3 αποδείξαμε ότι κάποια πρόταση ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, αντί για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Γενικότερα έχουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία προκύπτει αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.1.1 (β) στο σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : n_0 + n \in S\}$.

Πρόταση 1.1.2 (Αρχή της Πεπερασμένης Επαγωγής, τρίτη μορφή) *Αν $n_0 \in \mathbb{Z}$ και το $S \subseteq \mathbb{Z}$ έχει τις ιδιότητες*

- *$n_0 \in S$ και*
- *$k \in S \Rightarrow k+1 \in S$,*

τότε $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} \subseteq S$, δηλαδή $n \in S$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq n_0$.

Ανάλογα γενικεύεται και το μέρος (γ) της Πρότασης 1.1.1. Στο εξής μπορούμε να εφαρμόζουμε αυτές τις γενικεύσεις χωρίς ιδιαίτερη αναφορά και να παραλείπουμε τον ορισμό του συνόλου S, όταν θεωρείται ευνόητος.

Παράδειγμα 1.1.4 Ας βρούμε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους $2^{n-1} \geq n^2$. Αναμένοντας ότι η ανισότητα αυτή θα ισχύει για αρκετά μεγάλα n, βρίσκουμε με δοκιμές ότι η ανισότητα ισχύει για $n = 1$ και $n = 7$, αλλά για κανένα $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Επιπλέον, αν ισχύει για κάποιο $k \geq 7$, τότε

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \geq 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 7k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

οπότε ισχύει και για το $k+1$.

Αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.1.2 για $n_0 = 7$ προκύπτει ότι η ανισότητα ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 7$. Συμπερασματικά, για θετικούς ακεραίους n έχουμε $2^{n-1} \geq n^2$ αν και μόνο αν $n = 1$ ή $n \geq 7$. $\square$

Παράδειγμα 1.1.5 Έστω ότι x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $x+y \geq 1$. Θα δείξουμε ότι

$$x^n + y^n \ \geq \ \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1.5}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θα εφαρμόσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, με τη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (β). Παρατηρούμε ότι η (1.5) ισχύει ως ισότητα για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε θετικούς αριθμούς x, y με $x + y \geq 1$. Από την υπόθεσή μας, έχουμε $x^k + y^k \geq 1/2^{k-1}$. Πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα αυτή με την $x + y \geq 1$, βρίσκουμε ότι

$$(x+y)(x^k + y^k) \ \geq \ \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Για να συμπεράνουμε ότι $x^{k+1} + y^{k+1} \geq 1/2^k$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$2(x^{k+1} + y^{k+1}) \ \geq \ (x+y)(x^k + y^k).$$

Πράγματι, η τελευταία ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως $(x-y)(x^k - y^k) \geq 0$ και ισχύει διότι οι $x - y$ και $x^k - y^k$ είναι και οι δύο μη αρνητικοί, ή και οι δύο μη θετικοί αριθμοί (εξηγήστε γιατί).

Δείξαμε ότι η σχέση (1.5) ισχύει και για $n = k + 1$. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β), ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παράδειγμα 1.1.6 Θα αποδείξουμε ότι αν καθένας από τους ακεραίους $p_1, p_2, \dots, p_n$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακέραιων αριθμών, τότε το ίδιο ισχύει για το γινόμενό τους $p_1 p_2 \cdots p_n$.

Για $n \in \{0, 1\}$ η πρόταση είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το $n = k \geq 1$ και θεωρούμε ακεραίους $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$, καθένας από τους οποίους μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων. Από τις υποθέσεις μας προκύπτει ότι $p_1 p_2 \cdots p_k = a^2 + b^2$ και $p_{k+1} = x^2 + y^2$ για κάποια $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$. Από αυτό και την ταυτότητα

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \ = \ (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

προκύπτει ότι το $p_1 p_2 \cdots p_{k+1} = (p_1 p_2 \cdots p_k) \cdot p_{k+1}$ μπορεί επίσης να γραφεί ως το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων. Άρα, η πρόταση ισχύει και για το $n = k+1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β), η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα, αφού $2 = 1+1, 5 = 1+4$ και $13 = 4+9$, ο αριθμός $2^m \cdot 5^n \cdot 13^p$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακέραιων αριθμών για όλα τα $m, n, p \in \mathbb{N}$. □

Το αποτέλεσμα του επόμενου παραδείγματος είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Turán για γραφήματα.

Παράδειγμα 1.1.7 Σε μια συνάντηση n ατόμων, κάποιοι ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψίες (υποθέτουμε ότι κανένας δεν ανταλλάσσει χειραψία με τον εαυτό του και ότι δύο οποιαδήποτε άτομα ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία το πολύ μία φορά). Έστω ότι δεν υπάρχουν τρία άτομα τα οποία έχουν ανταλλάξει ανά δύο χειραψία. Θα δείξουμε ότι έχουν ανταλλαγεί το πολύ $n^2/4$ χειραψίες.

Θα εφαρμόσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, με τη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (γ). Το ζητούμενο είναι τετριμμένο για $n \le 2$. Υποθέτουμε ότι $n \ge 3$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους μικρότερους του n και θεωρούμε συνάντηση n ατόμων, όπως προηγουμένως. Ασφαλώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχει ανταλλαγεί τουλάχιστον μία χειραψία, έστω μεταξύ των a και b. Από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι μεταξύ των υπολοίπων $n-2$ ατόμων έχουν ανταλλαγεί το πολύ $(n-2)^2/4$ χειραψίες. Επίσης, από την υπόθεση του προβλήματος γνωρίζουμε ότι καθένα από τα $n-2$ αυτά άτομα έχει ανταλλάξει χειραψία με το πολύ έναν από τους a και b. Επομένως, συνολικά έχουν ανταλλαγεί το πολύ

$$1 + (n-2) + (n-2)^2/4 \ = \ n^2/4$$

χειραψίες. Άρα, το ζητούμενο ισχύει και για το n. Από την Πρόταση 1.1.1 (γ) συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παράδειγμα 1.1.8 Ας αποδείξουμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ \ge \ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{1.6}$$

για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots a_n$ με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $a_1, a_2, \dots a_n$ είναι όλοι διάφοροι του μηδενός.

Συμβολίζοντας με P το δεξιό μέλος της (1.6) και θέτοντας $b_i = a_i/P$ για $i \in [n]$, έχουμε $b_1 b_2 \cdots b_n = a_1 a_2 \cdots a_n / P^n = 1$ και η (1.6) γράφεται ως $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge n$. Αρκεί, επομένως, να δείξουμε ότι αν n θετικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν γινόμενο ίσο με 1, τότε το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο του n. Είναι βολικότερο να δείξουμε (ισοδύναμα) ότι αν n θετικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν γινόμενο μεγαλύτερο ή ίσο του 1, τότε το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο του n. Αυτή είναι η πρόταση την οποία επιλέγουμε να αποδείξουμε με επαγωγή στο n.

Για $n = 1$ η πρόταση είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k \ge 1$ και θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς $b_1, b_2, \dots, b_{k+1}$ με $b_1 b_2 \cdots b_{k+1} \ge 1$. Θα δείξουμε ότι $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1} \ge k+1$. Προφανώς, έχουμε $b_i \ge 1$ για τουλάχιστον ένα $i \in [k+1]$. Μπορούμε, επομένως, να υποθέσουμε ότι $b_{k+1} \ge 1$. Αφού το ζητούμενο είναι φανερό αν $b_i \ge 1$ για κάθε $i \in [k+1]$, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $b_k \le 1$. Τότε, $(b_k - 1)(b_{k+1} - 1) \le 0$, οπότε $b_k + b_{k+1} \ge b_k b_{k+1} + 1$. Κατά συνέπεια,

$$b_1 \cdots b_{k-1}(b_k + b_{k+1} - 1) \ \ge b_1 \cdots b_{k-1}(b_k b_{k+1}) \ = \ b_1 b_2 \cdots b_{k+1} \ \ge \ 1.$$

Αφού το γινόμενο των k θετικών αριθμών $b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + b_{k+1} - 1$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1, από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k, δηλαδή $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1} \ge k + 1$.

Δείξαμε ότι η πρόταση ισχύει και για $n = k + 1$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β), ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n. □

Αναδρομικές ακολουθίες. Με την ευκαιρία του επόμενου παραδείγματος εισάγουμε μια σημαντική έννοια για το βιβλίο αυτό, εκείνη της αναδρομικής ακολουθίας.

Ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ στοιχείων ενός συνόλου X λέγεται κάθε απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to X$ με $f(n) = x_n$ για $n \in \mathbb{N}$ (σε απεικονίσεις συνόλων, γενικότερα, αναφερόμαστε στην Ενότητα 1.2). Από την κατασκευή των φυσικών αριθμών προκύπτει (βλ. π.χ. [10, Κεφάλαιο 6] [3, Κεφάλαιο 6]) ότι μια τέτοια ακολουθία μπορεί να οριστεί αναδρομικά, αν καθοριστεί δηλαδή ο αρχικός όρος $x_0 \in X$ και το x_n ως συνάρτηση των $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, για $n \geq 1$. Για παράδειγμα, ο φυσικός αριθμός $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ ορίζεται ως ο n-οστός όρος της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{N}$ για την οποία

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ n a_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, έχουμε $a_0 = 1$, $a_1 = 1 \cdot a_0 = 1$, $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$, $a_4 = 5 \cdot a_4 = 120$ και ούτω καθεξής. Η μοναδικότητα της ακολουθίας αυτής είναι συνέπεια της αρχής της επαγωγής, αφού αν $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{N}$ για την οποία

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ n b_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{N}$, τότε με μια απλή εφαρμογή της Πρότασης 1.1.1 (β) βρίσκουμε ότι $a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.1.9 Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ρητών αριθμών που ορίζεται αναδρομικά, θέτοντας $a_0 = a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + (-1)^{n+1}}{a_{n-1}} \tag{1.7}$$

για $n \geq 1$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} a_2 &= (a_1^2 + 1)/a_0 = 2, \\ a_3 &= (a_2^2 - 1)/a_1 = 3, \\ a_4 &= (a_3^2 + 1)/a_2 = 5, \\ a_5 &= (a_4^2 - 1)/a_3 = 8, \\ a_6 &= (a_5^2 + 1)/a_4 = 13 \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Θα δείξουμε ότι ο a_n είναι θετικός ακέραιος για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για τον σκοπό αυτό, θα χρειαστεί να αποδείξουμε μια απλούστερη αναδρομική σχέση. Παρατηρούμε ότι $a_2 = a_1 + a_0$, $a_3 = a_2 + a_1$, $a_4 = a_3 + a_2$, $a_5 = a_4 + a_3$ και ούτω καθεξής. Θα δοκιμάσουμε, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \tag{1.8}$$

για κάθε $n \geq 1$. Πράγματι, η ισότητα αυτή ισχύει για $n \in \{1, 2\}$. Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$ και ότι η (1.8) ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους μικρότερους του n.

Τότε, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ και συνεπώς, εφαρμόζοντας την (1.7) δύο φορές, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^2 + (-1)^{n+1}}{a_{n-1}} = \frac{(a_{n-1}+a_{n-2})^2 + (-1)^{n+1}}{a_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}^2 + (-1)^{n+1}}{a_{n-1}} \\ &= a_{n-1} + 2a_{n-2} + \frac{a_{n-2}^2 + (-1)^{n+1}}{a_{n-1}} = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}. \end{aligned}$$

Αφού όμως έχουμε $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ και $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3}$ από την υπόθεση της επαγωγής, η ισότητα στην οποία καταλήξαμε είναι ισοδύναμη με την (1.8). Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (γ), η αναδρομική σχέση (1.8) ισχύει για κάθε $n \geq 1$. Από την ισότητα αυτή και μια νέα απλή εφαρμογή της Πρότασης 1.1.1 (γ) προκύπτει ότι $a_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία (a_n), την οποία θα συναντήσουμε και σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου, λέγεται *ακολουθία Fibonacci*. Ο n-οστός της όρος συμβολίζεται συνήθως με $F_n = a_{n-1}$, όπου $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για $n \geq 2$.

Παράδειγμα 1.1.10 Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών αριθμών που ορίζεται θέτοντας $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2}{a_{n-3}}$$

για $n \geq 3$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} a_4 &= (a_3a_1 + a_2^2)/a_0 = 2, \\ a_5 &= (a_4a_2 + a_3^2)/a_1 = 3, \\ a_6 &= (a_5a_3 + a_4^2)/a_2 = 7, \\ a_7 &= (a_6a_4 + a_5^2)/a_3 = 23, \\ a_8 &= (a_7a_5 + a_6^2)/a_4 = 59, \\ a_9 &= (a_8a_6 + a_7^2)/a_5 = 314, \end{aligned}$$

$a_{10} = 1529$, $a_{11} = 8209$, $a_{12} = 83313$ και ούτω καθεξής. Αν και αυτό δεν είναι τόσο απλό να αποδειχθεί όσο στην περίπτωση του Παραδείγματος 1.1.9, ο αριθμός a_n είναι ακέραιος για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (a_n) ανακαλύφθηκε από τον Michael Somos γύρω στο 1982 και αποτελεί μέλος μιας ευρύτερης οικογένειας ακολουθιών με απρόσμενες και συναρπαστικές ιδιότητες. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο άρθρο [9] (καθώς και σε πηγές στο διαδίκτυο). □

Στο Παράδειγμα 1.1.9 είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς απευθείας την αρχικά ζητούμενη πρόταση, δηλαδή ότι $a_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ για $n \in \mathbb{N}$ με επαγωγή στο n ή με άλλο τρόπο. Έτσι, χρειάστηκε να επινοήσουμε μια ισχυρότερη πρόταση, συγκεκριμένα την ισχύ της αναδρομικής σχέσης (1.8), την οποία μπορέσαμε να αποδείξουμε επαγωγικά. Το ίδιο συμβαίνει και στο τελευταίο παράδειγμα της ενότητας, όπου επινοείται μια αναδρομική σχέση για μια ακολουθία σε δύο μεταβλητές n και k.

Παράδειγμα 1.1.11 Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{C}$ γράφουμε

$$q_n(x) \;=\; (x-1)(x^2-1)\cdots(x^n-1) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(x^i-1),$$

όπου $q_0(x) = 1$ κατά σύμβαση. Για ακεραίους $0 \le k \le n$ και $x \ge 2$ θέτουμε

$$\begin{aligned} f_{n,k}(x) \;&=\; \frac{q_n(x)}{q_k(x)\cdot q_{n-k}(x)} \\ &=\; \frac{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^n-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^k-1)\cdot(x-1)(x^2-1)\cdots(x^{n-k}-1)}. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα,

$$f_{4,2}(x) \;=\; \frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdot(x-1)(x^2-1)} \;=\; 1+x+2x^2+x^3+x^4.$$

Θα δείξουμε ότι $f_{n,k}(x) \in \mathbb{N}$ για $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ και κάθε ακέραιο $x \ge 2$. Αφού αυτό φαίνεται δύσκολο να επιτευχθεί άμεσα, θα ψάξουμε να βρούμε κάποια αναδρομική σχέση την οποία ικανοποιεί το $f_{n,k}(x)$. Ο ισχυρισμός μας είναι τετριμμένος για $k \in \{0,n\}$ (και, ειδικότερα, για $n=0$ και $n=1$), αφού $f_{n,0}(x) = f_{n,n}(x) = 1$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για το $n-1$, όπου $n \ge 2$, και θεωρούμε ακέραιο $1 \le k \le n-1$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} q_n(x) \;&=\; q_{n-1}(x)\,(x^n-1) \;=\; q_{n-1}(x)\,(x^{n-k}-1\,+\,x^n-x^{n-k}) \\ &=\; q_{n-1}(x)\,(x^{n-k}-1) \,+\, x^{n-k}q_{n-1}(x)\,(x^k-1) \end{aligned}$$

και συνεπώς ότι

$$\begin{aligned} f_{n,k}(x) \;&=\; \frac{q_{n-1}(x)\,(x^{n-k}-1)}{q_k(x)\cdot q_{n-k}(x)} \,+\, \frac{x^{n-k}q_{n-1}(x)\,(x^k-1)}{q_k(x)\cdot q_{n-k}(x)} \\ &=\; \frac{q_{n-1}(x)}{q_k(x)\cdot q_{n-k-1}(x)} \,+\, x^{n-k}\,\frac{q_{n-1}(x)}{q_{k-1}(x)\cdot q_{n-k}(x)} \\ &=\; f_{n-1,k}(x) \,+\, x^{n-k}f_{n-1,k-1}(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Με βάση την υπόθεση της επαγωγής, από την οποία έχουμε ότι $f_{n-1,k}(x) \in \mathbb{N}$ και $f_{n-1,k-1}(x) \in \mathbb{N}$, και την ισότητα (1.9) συμπεραίνουμε ότι $f_{n,k}(x) \in \mathbb{N}$. Άρα, ο ισχυρισμός μας ισχύει και για το n και επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β), ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Παρατηρηση. Από την προηγούμενη απόδειξη έπεται η ισχυρότερη πρόταση ότι για όλα τα n και k, η ρητή συνάρτηση $f_{n,k}(x)$ είναι πολυώνυμο στο x με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές. Το άθροισμα των συντελεστών του $f_{n,k}(x)$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ που θα ορίσουμε στην Ενότητα 2.3.4 του Κεφαλαίου 2, αφού

$$\lim_{x \mapsto 1} f_{n,k}(x) \;=\; \lim_{x \mapsto 1} \frac{q_n(x)}{q_k(x) \cdot q_{n-k}(x)} \;=\; \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Κατά συνέπεια, για $x = 1$ η ισότητα (1.9) εξειδικεύεται στη βασική αναδρομική σχέση του Πορίσματος 2.3.1 (β) για τους διωνυμικούς συντελεστές.

1.1.2 Διαιρετότητα

Η έννοια της διαιρετότητας ακεραίων θα φανεί χρήσιμη στο βιβλίο αυτό, κυρίως σε παραδείγματα και ασκήσεις. Για ακεραίους m, n, λέμε ότι ο m *διαιρεί* τον n (ή ότι ο m είναι *διαιρέτης* του n, ή ότι ο n *διαιρείται* με τον m), και ότι ο n είναι *ακέραιο πολλαπλάσιο* του m, αν υπάρχει $q \in \mathbb{Z}$ με $n = mq$. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε $m \mid n$.

Παραδειγμα. Από την ταυτότητα (1.4) προκύπτει ότι $a - 1 \mid a^n - 1$ για όλα τα $a \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Παραδειγμα. Θα δείξουμε ότι $2^n \mid (n+1)(n+2) \cdots (2n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a(n) = (n+1)(n+2) \cdots (2n)$, έχουμε

$$a(n) \;=\; \frac{(2n)!}{n!} \;=\; \frac{1}{n!} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \;=\; 2^n \cdot q(n),$$

όπου $q(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ είναι περιττός αριθμός. Συμπεραίνουμε ότι $2^n \mid a(n)$, και μάλιστα ότι το 2^n είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί το $a(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η σχέση της διαιρετότητας στο $\mathbb{Z}$ έχει τις εξής βασικές ιδιότητες.

Πρόταση 1.1.3 *Για $a, b, c \in \mathbb{Z}$:*

(α) $a \mid a$,

(β) *αν* $a \mid b$ *και* $b \mid a$, *τότε* $|a| = |b|$,

(γ) *αν* $a \mid b$ *και* $b \mid c$, *τότε* $a \mid c$,

(δ) *αν* $a \mid b$ *και* $a \mid c$, *τότε* $a \mid bx + cy$ *για όλα τα* $x, y \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Το (α) είναι φανερό, αφού $a = a \cdot 1$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.

Για το (β), υποθέτουμε ότι $a \mid b$ και $b \mid a$. Τότε, $b = ap$ και $a = bq$ για κάποια $p, q \in \mathbb{Z}$. Αν οι a, b είναι μη μηδενικοί αριθμοί, τότε το ίδιο ισχύει για τους p, q και, αφού αυτοί είναι ακέραιοι, θα πρέπει $|p| \geq 1$ και $|q| \geq 1$. Άρα, $|b| = |a| \cdot |p| \geq |a|$ και

$|a| = |b| \cdot |q| \geq |b|$, από όπου προκύπτει ότι $|a| = |b|$. Διαφορετικά, έχουμε $a = b = 0$. Σε κάθε περίπτωση, $|a| = |b|$.

Για το (γ), ας υποθέσουμε ότι $a \mid b$ και $b \mid c$. Τότε, $b = ap$ και $c = bq$ για κάποια $p, q \in \mathbb{Z}$, οπότε $c = apq = at$ με $t = pq \in \mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια, $a \mid c$.

Για το (δ), ας υποθέσουμε ότι $a \mid b$ και $a \mid c$. Τότε, $b = ap$ και $c = aq$ για κάποια $p, q \in \mathbb{Z}$, οπότε $bx + cy = a(px + qy)$. Αφού $px + qy \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι $a \mid bx + cy$. $\square$

Για μια μη τετριμμένη εφαρμογή των παραπάνω ιδιοτήτων παραπέμπουμε στην Άσκηση 21 (γ) και τη λύση της.

Η ακόλουθη θεμελιώδης πρόταση εκφράζει την έννοια της διαιρετότητας σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Πρόταση 1.1.4 (Ευκλείδεια Διαίρεση) *Για δεδομένους $n \in \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q, r τέτοιοι ώστε $n = mq + r$ και $0 \leq r < m$. Επιπλέον, ο m διαιρεί τον n αν και μόνο αν $r = 0$.*

Οι ακέραιοι q και r λέγονται *πηλίκο* και *υπόλοιπο* της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το m, αντίστοιχα. Η ισότητα (1.10) στην πρόταση που ακολουθεί λέγεται *m-αδική παράσταση* του n. Οι ακέραιοι a_i είναι τα *ψηφία* του n με βάση το m.

Πρόταση 1.1.5 *Έστω $m, k \in \mathbb{N}$, με $m \geq 2$. Κάθε φυσικός αριθμός $n < m^{k+1}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$n \ = \ a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_k m^k \tag{1.10}$$

με $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Για τις αποδείξεις των δύο προηγούμενων προτάσεων, οι οποίες δεν έχουν κεντρικό ρόλο στο βιβλίο αυτό, παραπέμπουμε στις ασκήσεις του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 1.1.12 Ποιοι όροι της ακολουθίας Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακέραια πολλαπλάσια του 3; Εφαρμόζοντας διαδοχικά τη βασική αναδρομική σχέση $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ βρίσκουμε ότι

$$F_n \ = \ F_{n-1} + F_{n-2} \ = \ 2F_{n-2} + F_{n-3} \ = \ 3F_{n-3} + 2F_{n-4}$$

και, λόγω της Πρότασης 1.1.3 (δ), συμπεραίνουμε ότι $3 \mid F_n \Leftrightarrow 3 \mid F_{n-4}$ για $n \geq 3$. Με επαγωγή στο m προκύπτει ότι, γενικότερα, $3 \mid F_n \Leftrightarrow 3 \mid F_{n-4m}$ για όλα τα $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 4m$. Άρα, αφού $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ και $F_3 = 2$, το 3 διαιρεί το F_{4m} αλλά κανέναν από τους F_{4m+1}, F_{4m+2} και F_{4m+3}, για $m \in \mathbb{N}$. Αφού κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $n = 4m$, ή $n = 4m + 1$, ή $n = 4m + 2$, ή $n = 4m + 3$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ (Πρόταση 1.1.4), συμπεραίνουμε ότι $3 \mid F_n \Leftrightarrow 4 \mid n$ για $n \in \mathbb{N}$.

Μια μερική γενίκευση αυτής της πρότασης δίνεται στην Άσκηση 24 (γ). $\square$

Ένας ακέραιος αριθμός p λέγεται *πρώτος* αν $p \geq 2$ και οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του p είναι ο 1 και ο p. Έτσι, οι μικρότεροι πρώτοι αριθμοί είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,... Κάθε ακέραιος $n \geq 2$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο (ενός ή περισσοτέρων) πρώτων αριθμών και μάλιστα, ουσιαστικά με μοναδικό τρόπο. Για την ύπαρξη αυτής της παράστασης παραπέμπουμε στην Άσκηση 25 και για τη μοναδικότητα (η οποία βασίζεται στην έννοια του μέγιστου κοινού διαιρέτη) στην Ενότητα 1.5 του [2]. Για μια ολοκληρωμένη εισαγωγή στη στοιχειώδη θεωρία αριθμών προτείνουμε το σύγγραμμα [2].

1.2 Σχέσεις και απεικονίσεις

Στην ενότητα αυτή υπενθυμίζουμε τον ορισμό της έννοιας της απεικόνισης (και, γενικότερα, της διμελούς σχέσης μεταξύ συνόλων, καθώς και της σύνθεσης τέτοιων σχέσεων) και της έννοιας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης έχει ήδη κάποια εξοικείωση με αυτές τις πολύ βασικές έννοιες.

1.2.1 Διμελείς σχέσεις

Διμελής σχέση (ή, απλούστερα, σχέση) λέγεται κάθε τριάδα $R = (X, Y, \Gamma)$, όπου X και Y είναι σύνολα και Γ είναι υποσύνολο του $X \times Y$. Για $(x, y) \in \Gamma$, γράφουμε xRy και λέμε ότι το $x \in X$ *σχετίζεται* με το $y \in Y$ μέσω της R. Έτσι, με μια διμελή σχέση R όπως παραπάνω, κάθε στοιχείο του X μπορεί να σχετίζεται με κανένα, ή με ένα, ή και με περισσότερα του ενός στοιχεία του Y. Λέμε ότι η R είναι διμελής σχέση από το σύνολο X στο σύνολο Y και, αν $X = Y$, ότι είναι διμελής σχέση επί του X. Το σύνολο $\Gamma = \Gamma_R$ είναι το *γράφημα* της R.

Παράδειγμα 1.2.1 (α) Για κάθε σύνολο X ορίζεται η *ταυτοτική* διμελής σχέση id_X επί του X για την οποία, για $x, y \in X$, το x σχετίζεται με το y αν και μόνο αν $x = y$.

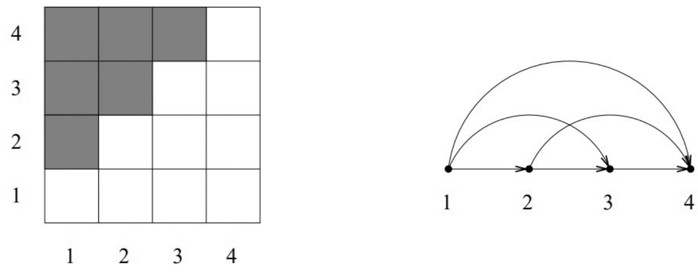
(β) Έστω η διμελής σχέση R επί του συνόλου $[n]$ για την οποία xRy αν και μόνο αν $x < y$. Για $n = 4$, οπότε $\Gamma_R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$, δύο τρόποι να απεικονιστεί η σχέση R δίνονται στο Σχήμα 1.1. Με τη σχέση αυτή, το 1 σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του $[n]$ εκτός από τον εαυτό του, ενώ το n δεν σχετίζεται με κανένα. $\square$

Για σύνολα X, Y, Z και διμελείς σχέσεις R από το X στο Y και S από το Y στο Z ορίζεται η *σύνθεση* $R \circ S$ ως η διμελής σχέση από το X στο Z με την οποία το $x \in X$ σχετίζεται με το $z \in Z$ αν υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε xRy και ySz. Η σύνθεση διμελών σχέσεων έχει τις εξής βασικές ιδιότητες.

Πρόταση 1.2.1 *Έστω σύνολα X, Y, Z, W.*

(α) *Για διμελείς σχέσεις R από το X στο Y, S από το Y στο Z και T από το Z στο W ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.*

(β) *Για κάθε διμελή σχέση R από το X στο Y, έχουμε $\mathrm{id}_X \circ R = R \circ \mathrm{id}_Y = R$.*



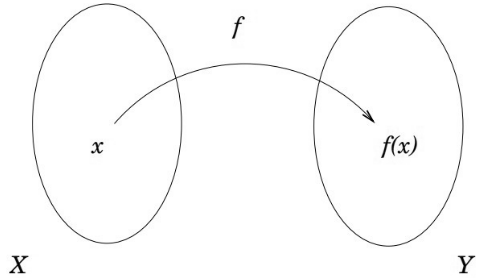
Σχήμα 1.1: Μια διμελής σχέση επί του $\{1, 2, 3, 4\}$

Απόδειξη. Για το (α), παρατηρούμε ότι η $R \circ S$ είναι διμελής σχέση από το X στο Ζ και η $(R \circ S) \circ T$ από το X στο W. Επιπλέον, με την τελευταία, το $x \in X$ σχετίζεται με το $w \in W$ αν και μόνο αν υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο ώστε $x(R \circ S)z$ και zTw. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχουν $y \in Y$ και $z \in Z$, τέτοια ώστε xRy, ySz και zTw. Με παρόμοιο σκεπτικό φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα για την $R \circ (S \circ T)$ και συμπεραίνουμε ότι $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. Η επαλήθευση του (β) αφήνεται στον αναγνώστη. □

Παραδειγμα. Για τη σχέση R του Παραδείγματος 1.2.1 (β) επί του συνόλου $[n]$ και για $x, y \in [n]$, το x σχετίζεται με το y μέσω της $R \circ R$ αν και μόνο αν $x + 1 < y$.

1.2.2 Απεικονίσεις

Μια διμελής σχέση $f = (X, Y, \Gamma)$ λέγεται *απεικόνιση* αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y \in Y$, τέτοιο ώστε xfy. Με απλούστερα λόγια, η f καθορίζεται από δύο σύνολα X, Y και έναν κανόνα Γ, ο οποίος σε κάθε στοιχείο $x \in X$ αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο $y \in Y$. Γράφουμε $f : X \to Y$, και για $x \in X$ συμβολίζουμε με $f(x)$ το μοναδικό στοιχείο του Y με το οποίο σχετίζεται το x, μέσω της f.



Σχήμα 1.2: Μια απεικόνιση $f : X \to Y$

Παράδειγμα 1.2.2 (α) Για κάθε σύνολο X, η ταυτοτική διμελής σχέση id_X του Παραδείγματος 1.2.1 (α) είναι απεικόνιση $\mathrm{id}_X : X \to X$ και έχουμε $\mathrm{id}_X(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

(β) Σύμφωνα με την αρχή του ελαχίστου, ορίζεται απεικόνιση $f : 2^{\mathbb{N}} \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ για την οποία $f(S)$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του S, για κάθε μη κενό $S \subseteq \mathbb{N}$. Για παράδειγμα, για το σύνολο S των πρώτων αριθμών έχουμε $f(S) = 2$. $\square$

Παράδειγμα 1.2.3 Κάθε απεικόνιση $\circ : \Omega \times \Omega \to \Omega$ λέγεται *πράξη* στο σύνολο Ω. Συνήθως συμβολίζουμε με $a \circ b$ την εικόνα του $(a, b) \in \Omega \times \Omega$ υπό την $\circ$, αντί για $\circ(a, b)$. Για παράδειγμα, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \times &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

είναι πράξεις στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών (ομοίως για τα σύνολα $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$). Με τις πράξεις αυτές, κάθε ζεύγος $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ φυσικών αριθμών απεικονίζεται στο άθροισμα $a + b \in \mathbb{N}$ και στο γινόμενο $ab \in \mathbb{N}$ των a και b, αντίστοιχα.

Ομοίως, η ένωση και η τομή

$$\begin{aligned} \bigcup &: 2^X \times 2^X \to 2^X \\ \bigcap &: 2^X \times 2^X \to 2^X \end{aligned}$$

είναι πράξεις στο δυναμοσύνολο 2^X ενός συνόλου X. Με τις πράξεις αυτές, κάθε ζεύγος $(A, B) \in 2^X \times 2^X$ υποσυνόλων του X απεικονίζεται στην ένωση $A \cup B \in 2^X$ και στην τομή $A \cap B \in 2^X$ των A και B, αντίστοιχα. $\square$

Θεωρώντας ότι ο αναγνώστης έχει ήδη κάποια εξοικείωση με την έννοια της απεικόνισης, για $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$, θα συμβολίζουμε με $f(A)$ την εικόνα του A και με $f^{-1}(B)$ την αντίστροφη εικόνα του B, μέσω της f, δηλαδή:

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) : x \in A\}, \\ f^{-1}(B) &= \{x \in X : f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Το υποσύνολο $f(X)$ του Y είναι η εικόνα της f. Για απλότητα, θα γράφουμε $f^{-1}(y)$ για την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$ ενός υποσυνόλου $\{y\}$ του Y με ένα μόνο στοιχείο.

Ο περιορισμός της απεικόνισης $f : X \to Y$ στο $A \subseteq X$ ορίζεται ως η απεικόνιση $f|_A : A \to Y$ με $f|_A(x) = f(x)$ για $x \in A$. Γενικότερα, για $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ ορίζεται ο περιορισμός

$$f|_{A,B} : A \to B$$

της f, με την προϋπόθεση ότι $f(A) \subseteq B$.

Παραδειγμα. Για την απεικόνιση $f : 2^{\mathbb{N}} \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ του Παραδείγματος 1.2.2 (β), η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{3, 4\})$ αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ που περιέχουν το 3 ή το 4 (ή και τα δύο), αλλά κανένα από τα 0, 1, 2.

Παραδειγμα. Έστω ένα μη κενό σύνολο X. Αφού η ένωση δύο οποιωνδήποτε μη κενών υποσυνόλων του X είναι επίσης μη κενό υποσύνολο του X, η πράξη της ένωσης $\cup : 2^X \times 2^X \to 2^X$ του Παραδείγματος 1.2.3 περιορίζεται σε πράξη στο σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του X. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για την πράξη της τομής, εκτός αν το X έχει ένα μόνο στοιχείο (εξηγήστε γιατί). $\square$

Η σύνθεση δύο απεικονίσεων $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$, όπως ορίστηκε στην Ενότητα 1.2.1, είναι επίσης απεικόνιση, συμβολίζεται με $g \circ f : X \to Z$ (αντί για $f \circ g : X \to Z$) και έχουμε $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in X$. Υπενθυμίζουμε τώρα τον ακόλουθο βασικό ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 *Μια απεικόνιση συνόλων $f : X \to Y$ λέγεται*

(α) *επί αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$,*

(β) *ένα προς ένα (1–1) αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$,*

(γ) *αμφιμονοσήμαντη (ή 1–1 και επί, ή 1–1 αντιστοιχία) αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.*

Επομένως, η $f : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα 1–1 και επί. Ισοδύναμες συνθήκες για να είναι η $f : X \to Y$ ένα προς ένα είναι καθεμιά από τις παρακάτω:

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, για $x_1, x_2 \in X$,
- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, για $x_1, x_2 \in X$.

Επίσης, η $f : X \to Y$ είναι επί αν και μόνο αν $f(X) = Y$.

Παράδειγμα 1.2.4 (α) Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ που ορίζεται θέτοντας

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x/2, & \text{αν ο } x \text{ είναι άρτιος} \\ -(x+1)/2, & \text{αν ο } x \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

για $x \in \mathbb{N}$. Για $y \in \mathbb{Z}$, λύνοντας την εξίσωση $f(x) = y$, βρίσκουμε τη μοναδική λύση

$$x \;=\; \begin{cases} 2y, & \text{αν } y \in \mathbb{N} \\ -2y-1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και συμπεραίνουμε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

(β) Έστω οι απεικονίσεις $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και $h : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}$ που ορίζονται θέτοντας $g(x) = x + 1$ για $x \in \mathbb{N}$ και $h(x) = |x|$ για $x \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, αντίστοιχα. Η g είναι 1–1 αφού για κάθε $y \in \mathbb{N}$, η εξίσωση $g(x) = y$ έχει το πολύ μία λύση $x \in \mathbb{N}$. Όμως, η g δεν είναι επί διότι για $y = 0$, η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση $x \in \mathbb{N}$. Ομοίως, η h είναι επί αφού για κάθε $y \in \mathbb{N}$, το $x = y$ είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = y$. Όμως, η h δεν είναι 1–1 διότι η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις $x \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ για $y = 1$. $\square$

Επισημαίνουμε ότι (εξηγήστε γιατί) η σύνθεση δύο 1–1 (αντίστοιχα, επί) απεικονίσεων είναι επίσης 1–1 (αντίστοιχα, επί) απεικόνιση.

Προκειμένου να δείξουμε ότι μια απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη, συχνά χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο.

Πρόταση 1.2.2 *Μια απεικόνιση συνόλων $f : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $g : Y \to X$ τέτοια ώστε $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in X$ και $f(g(y)) = y$ για κάθε $y \in Y$, δηλαδή η σύνθεση $g \circ f$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο X και η $f \circ g$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο Y.*

Απόδειξη. Αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε για $y \in Y$ ορίζουμε ως $g(y)$ το μοναδικό στοιχείο $x \in X$ με $f(x) = y$ και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $g : Y \to X$ που προκύπτει έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Το αντίστροφο έπεται από την Άσκηση 34.
□

Στην περίπτωση της Πρότασης 1.2.2, καθεμιά από τις f, g λέγεται *αντίστροφη απεικόνιση* της άλλης.

Παραδειγμα. Η αντίστροφη απεικόνιση της $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ του Παραδείγματος 1.2.4 (α) είναι η $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με

$$g(y) \;=\; \begin{cases} 2y, & \text{αν } y \in \mathbb{N} \\ -2y-1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $y \in \mathbb{Z}$.

1.3 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η παράσταση $n = 2^k \cdot q$ του Παραδείγματος 1.1.1 είναι μοναδική για κάθε θετικό ακέραιο n.

2. Δίνεται $n \in \mathbb{N}$.

   (α) Χρησιμοποιώντας την αρχή του ελαχίστου (ή με άλλο τρόπο), δείξτε ότι υπάρχει ζεύγος $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $a < b$ και $n = a + b(b-1)/2$. Για παράδειγμα, $20 = 5 + 6 \cdot (6-1)/2$ και $21 = 0 + 7 \cdot (7-1)/2$.

   (β) Δείξτε ότι το ζεύγος (a, b) του ερωτήματος (α) είναι μοναδικό.

3. Για $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε τις ταυτότητες:

   (α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \;=\; n(n+1)/2.$

   (β) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 \;=\; (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} k.$

   (γ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \;=\; \frac{n(n-1)}{n+1}.$

4. Για μιγαδικούς αριθμούς (γενικότερα, για στοιχεία μιας αβελιανής προσθετικής ομάδας) a_i, b_i και a_{ij}, δείξτε ότι:

(α) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$

(β) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right).$

5. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους $2^{n-1} \ge n^3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

6. Δείξτε ότι
$$n^{n/2} \;\le\; n! \;\le\; 2(n/2)^n \tag{1.11}$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

7. Δείξτε ότι
$$2^n (n!)^2 \;\le\; (2n)! \;\le\; 4^n (n!)^2 \tag{1.12}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n για τους οποίους ισχύει καθεμιά από τις παρακάτω ανισότητες:

   (α) $(2n)! \;\le\; (n+1)(n!)^3$

   (β) $(2n)! \;\le\; (n!)^3$

8. Έστω $p(n) = \dfrac{1}{4^n}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ για $n \in \mathbb{N}$.

   (α) Δείξτε ότι
$$\begin{aligned}(p(n))^2 \;&=\; \frac{1}{2n+1}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)\\ &=\; \frac{1}{4n}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{5^2}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)^{-1}\end{aligned}$$
   για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

   (β) Συναγάγετε ότι ισχύουν οι ισχυρότερες ανισότητες
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \;\le\; p(n) \;\le\; \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
   από τις (1.12) για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

9. Για $a \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι
$$na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a \;=\; (a-1)^2 \cdot (a + 2a^2 + \cdots + na^n) \tag{1.13}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

   (α) Με επαγωγή στο n.

   (β) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την ταυτότητα (1.4).

Επιπλέον:

(γ) Συναγάγετε έναν τύπο για το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} k2^k = 1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$.

(δ) Δείξτε τον τύπο στον οποίο καταλήξατε στο ερώτημα (γ) με επαγωγή στο n.

10. Για ποια $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, τέτοιοι ώστε

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \; ; \tag{1.14}$$

11. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i! = 1! + 2! + \cdots + n!$$

(οπότε $f(0) = 0$). Βρείτε μια αναδρομική σχέση για την ακολουθία $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ της μορφής $f(n) = p(n)f(n-1) + q(n)f(n-2)$, όπου $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του x.

12. Έστω η ακολουθία Fibonacci (F_n) του Παραδείγματος 1.1.9, με $F_1 = F_2 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για $n \geq 2$. Έχουμε $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ και ούτω καθεξής. Δείξτε ότι για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:

(α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$

(β) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$

(γ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$

(δ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kF_k = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2.$

(ε) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$

(στ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k F_{k+1} = \begin{cases} F_{n+1}^2 - 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ F_{n+1}^2, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$

13. Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διακεκριμένων όρων της ακολουθίας Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για $n \geq 1$.

14. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών η οποία ορίζεται θέτοντας $a_0 = a_1 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + (-1)^n a_{n-2}$ για $n \geq 2$. Δείξτε ότι το a_n είναι θετικός ακέραιος για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

15. Δίνεται η ακολουθία $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών αριθμών που ορίζεται θέτοντας $G_0 = G_1 = 1$ και
$$G_{n+1} \;=\; (G_n^2+1)/G_{n-1}$$
για $n \geq 1$.

(α) Δείξτε ότι $G_{n+1} = 3G_n - G_{n-1}$ για $n \geq 1$.
(β) Συναγάγετε ότι $G_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Δείξτε ότι $G_n = F_{2n-1}$ για $n \geq 1$, όπου (F_n) είναι η ακολουθία Fibonacci της Άσκησης 12.

16. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών αριθμών που ορίζεται θέτοντας $a_0 = a_1 = 1$ και $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}/4$ για $n \geq 2$. Έχουμε $a_2 = 3/4$, $a_3 = 1/2$, $a_4 = 5/16$, $a_5 = 3/16$.

(α) Δείξτε ότι $a_n = \dfrac{n+1}{2n}\, a_{n-1}$ για $n \geq 1$.
(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n.

17. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών που ορίζεται θέτοντας $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ και $a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 a_{n-2}$ για $n \geq 2$. Έχουμε $a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 10$, $a_5 = 26$.

(α) Βρείτε έναν αναδρομικό τύπο για το $b_n := a_n - n a_{n-1}$, όπου $n \geq 1$.
(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το b_n.
(γ) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n. Ποιο είναι το όριο του $a_n/n!$ για $n \to \infty$;

18. Έστω $a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ για $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 2$.
(β) Υπολογίστε το άθροισμα
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}a_{k+2}}{(a_k a_{k+1})^2}$$
για $n \in \mathbb{N}$. Ποιο είναι το όριο για $n \to \infty$;
(γ) Υπολογίστε το γινόμενο
$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right)$$
για $n \in \mathbb{N}$. Ποιο είναι το όριο για $n \to \infty$;

19. Για $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ ορίζουμε τους ακεραίους $a_{n,k}$ από την πολυωνυμική ταυτότητα
$$(1+x+x^2)^n \;=\; \sum_{k=0}^{2n} a_{n,k}x^k. \tag{1.15}$$
Θέτουμε $a_{n,k} = 0$ για ακεραίους k εκτός του πεδίου $0 \leq k \leq 2n$.

(α) Δείξτε ότι $a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k-2}$ για κάθε θετικό ακέραιο n και όλα τα $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι

$$\begin{aligned} a_{n,0} + a_{n,3} + a_{n,6} + \cdots &= a_{n,1} + a_{n,4} + a_{n,7} + \cdots \\ &= a_{n,2} + a_{n,5} + a_{n,8} + \cdots = 3^{n-1} \end{aligned}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

(γ) Δείξτε το (β) θέτοντας $x = 1$, $x = \omega$ και $x = \omega^2$ στην (1.15), όπου $\omega = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ είναι η πρωταρχική τρίτη ρίζα της μονάδος.

(δ) Γενικεύστε για τους συντελεστές του πολυωνύμου $(1 + x + x^2 + \cdots + x^m)^n$.

20. Για θετικούς ακεραίους a, n, δείξτε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

    (i) $a + 1 \mid a^n + 1$

    (ii) $1 + a + \cdots + a^{n-1} \mid 1 + a^2 + \cdots + a^{2n-2}$

    (iii) $a = 1$, ή $a \geq 2$ και ο n είναι περιττός αριθμός.

21. Αποδείξτε τις σχέσεις διαιρετότητας

    (α) $a^2 + a + 1 \mid a^4 + a^2 + 1$

    (β) $a^2 + a + 1 \mid a^8 + a^4 + 1$

    (γ) $a^2 + a + 1 \mid a^5 + a + 1$

    (δ) $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \mid a^{24} + a^{18} + a^{12} + a^6 + 1$

    για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.

22. Θέτουμε $a_n = 6^n - 1 - 5n$ για $n \in \mathbb{N}$.

    (α) Βρείτε μια αναδρομική σχέση για την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

    (β) Δείξτε ότι το a_n διαιρείται με το 25 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

    (γ) Για ποια $n \in \mathbb{N}$ το a_n διαιρείται με το 125;

23. Για την ακολουθία Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για $n \geq 1$:

    (α) Δείξτε ότι $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

    (β) Δείξτε ότι $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

    Σημείωση: Από τα παραπάνω έπεται ότι $F_n \mid F_{2n}$ και ότι το F_{2n+1} είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

24. Για την ακολουθία Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για $n \geq 1$:

    (α) Δείξτε ότι $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$ για $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(β) Για όσους γνωρίζουν πράξεις πινάκων: Δείξτε ότι

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \tag{1.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και χρησιμοποιήστε αυτήν την ισότητα για να αποδείξετε την ταυτότητα του (α).

(γ) Δείξτε ότι $m \mid n \Rightarrow F_m \mid F_n$ για $m, n \in \mathbb{N}$.

25. Αποδείξτε ότι κάθε ακέραιος $n \geq 2$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο (ενός ή περισσοτέρων) πρώτων αριθμών. Συναγάγετε ότι κάθε τέτοιος ακέραιος έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη.

26. Αποδείξτε την Πρόταση 1.1.4.

27. Αποδείξτε την Πρόταση 1.1.5.

28. Ορίζουμε μια ακολουθία $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ αναδρομικά, θέτοντας $f(0) = 0$ και

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(n), \\ f(2n+1) &= f(n) + 1, \end{aligned}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

(α) Υπολογίστε το $f(2018)$.

(β) Για ποια $n \in \{1000, 1001, \dots, 2000\}$ ισχύει ότι $f(n) = 2$;

(γ) Για ποια $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $f(n) = n/3$;

29. Για διμελή σχέση R πάνω στο σύνολο X θέτουμε $R^1 = R$ και $R^n = R^{n-1} \circ R$, για $n \geq 2$.

(α) Δώστε παράδειγμα τέτοιο ώστε $\Gamma_{R^1} \subset \Gamma_{R^2} \subset \cdots$.

(β) Δώστε παράδειγμα τέτοιο ώστε $\Gamma_{R^1} \supset \Gamma_{R^2} \supset \cdots$.

30. Θεωρούμε μια πράξη $\circ : \Omega \times \Omega \to \Omega$ στο σύνολο Ω (βλ. Παράδειγμα 1.2.3). Για $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$ ορίζουμε

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n = \begin{cases} a_1, & \text{αν } n = 1 \\ (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n, & \text{αν } n \geq 2 \end{cases}$$

και θέτουμε $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n = a^n$, όταν $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$. Υποθέτουμε ότι $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ για $a, b, c \in \Omega$ (μια τέτοια πράξη λέγεται προσεταιριστική).

(α) Δείξτε ότι

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n = (a_1 \circ \cdots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_n) \tag{1.17}$$

για όλα τα $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$ και κάθε $i \in [n-1]$.

(β) Συναγάγετε ότι $a^m \circ a^n = a^{m+n}$ και $(a^m)^n = a^{mn}$ για όλα τα $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και κάθε $a \in \Omega$.

31. Για σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ θέτουμε

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \ := \ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ := \ A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

όπου τα δεξιά μέλη ορίζονται λόγω της Άσκησης 30. Για $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$ δείξτε τους τύπους:

(α) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$,

(β) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$,

(γ) $\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} (\Omega \setminus A_i)$,

(δ) $\Omega \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} (\Omega \setminus A_i)$.

Επιπλέον, αν $f : X \to Y$ είναι απεικόνιση συνόλων, για $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$ και $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq Y$ δείξτε ότι

(ε) $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$,

(στ) $f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ \subseteq \ \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$.

(ζ) $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i)$,

(η) $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i)$.

32. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ορίζεται απεικόνιση $f : X \to Y$;

(α) $X = Y = 2^{\mathbb{N}}$ και $f(S) = \mathbb{N} \setminus S$, για $S \subseteq \mathbb{N}$.
(β) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $Y = \mathbb{N}$ και $f(S)$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N} \setminus S$, για $S \subseteq \mathbb{N}$.
(γ) $X = Y = \mathbb{N}$ και $f(n) = n^2 - 1$, για $n \in \mathbb{N}$.
(δ) $X = Y = \mathbb{N}$, $f(0) = 0$ και

$$\begin{aligned} f(2n) \quad &= \quad f(n)^2, \\ f(2n+1) \quad &= \quad f(n) + 1, \end{aligned}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

(ε) $X = Y = \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} f(n-2)+1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ f(n-3)+2, & \text{αν ο } n \text{ διαιρείται με το 3} \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $f(n) = 0$ για τις υπόλοιπες τιμές του $n \in \mathbb{N}$.

33. Έστω $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ και $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, για $x \in X$.

(α) Δείξτε ότι η $f : X \to X$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση.

(β) Για $n \in \mathbb{N}$, βρείτε έναν απλό τύπο για το $f^n(x)$, όπου $f^n : X \to X$ είναι η απεικόνιση που ορίζεται (σε συμφωνία με την Άσκηση 30) θέτοντας $f^0 = \mathrm{id}_X$ και $f^n = f \circ f^{n-1}$, για $n \geq 1$.

34. Δείξτε ότι μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι:

(α) 1–1 αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $g : Y \to X$ τέτοια ώστε $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in X$,

(β) επί αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $g : Y \to X$ τέτοια ώστε $f(g(y)) = y$ για κάθε $y \in Y$.

Υποδείξεις - Λύσεις

1. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο παραστάσεις $n = 2^k \cdot q$ και $n = 2^\ell \cdot p$, όπου $k, \ell \in \mathbb{N}$ και p, q είναι περιττοί θετικοί ακέραιοι. Τότε, $2^k \cdot q = 2^\ell \cdot p$ και συνεπώς $p = 2^{k-\ell} \cdot q$ και $q = 2^{\ell-k} \cdot p$. Αφού ο p είναι περιττός αριθμός, από την πρώτη ισότητα παίρνουμε $k \le \ell$ και ομοίως, αφού ο q είναι περιττός αριθμός, από τη δεύτερη ότι $k \ge \ell$. Συμπεραίνουμε ότι $k = \ell$, οπότε και $p = q$.

2. Για το (α), θεωρούμε το σύνολο $S = \{n - m(m-1)/2 : m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cap \mathbb{N}$. Έχουμε $n \in S$, οπότε $S \neq \emptyset$, και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε το ελάχιστο στοιχείο, έστω $a = n - b(b-1)/2$, του S. Προφανώς, έχουμε $a \in \mathbb{N}$ και $b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Επίσης, αφού $n - b(b+1)/2 < a$, από τον ορισμό του a έχουμε $n - b(b+1)/2 \notin S$, άρα $n - b(b+1)/2 < 0$, οπότε

$$a \;=\; n - \frac{b(b-1)}{2} \;<\; \frac{b(b+1)}{2} - \frac{b(b-1)}{2} \;=\; b.$$

Δείξαμε ότι το ζεύγος (a, b) έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Η απόδειξή μας οδηγεί και στη μοναδικότητα του ερωτήματος (β). Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι (a, b), $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι ζεύγη με $a < b, c < d$ και $n = a + b(b-1)/2 = c + d(d-1)/2$. Τότε,

$$\frac{b(b-1)}{2} \;\le\; n \;=\; c + \frac{d(d-1)}{2} \;<\; d + \frac{d(d-1)}{2} \;=\; \frac{d(d+1)}{2},$$

από όπου προκύπτει ότι $b < d + 1$, δηλαδή $b \le d$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $d \le b$ και συμπεραίνουμε ότι $b = d$ και, κατά συνέπεια, $a = c$.

3. Το (α) αφήνεται στον αναγνώστη. Σύμφωνα με αυτό, για το (β), αρκεί να δείξουμε ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με $(-1)^{n-1} n(n+1)/2$. Εφαρμόζουμε επαγωγή στο n (το ζητούμενο είναι φανερό για $n = 0$). Υποθέτοντας ότι ισχύει για το $n-1 \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 \;&=\; \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k^2 \;+\; (-1)^{n-1} n^2 \\ &=\; (-1)^{n-2} n(n-1)/2 \;+\; (-1)^{n-1} n^2 \;=\; (-1)^{n-1} n(n+1)/2.\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 1.1.1 (β). Ομοίως για το (γ), ας συμβολίσουμε με S_n το αριστερό μέλος της προτεινόμενης ισότητας, δηλαδή

$$S_n \;=\; \frac{0 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

Έχουμε $S_1 = 0$ και συνεπώς το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το $n - 1 \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ότι

$$S_n \;=\; S_{n-1} + \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \;=\; \frac{(n-1)(n-2)}{n} + \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n+1)+(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{(n-1)n^2}{n(n+1)} = \frac{n(n-1)}{n+1},$$

ολοκληρώνοντας έτσι το βήμα της επαγωγής.

4. Για το (α), εφαρμόστε επαγωγή στο n. Για το (β), εφαρμόζουμε επαγωγή στο m, με τη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (β). Υποθέτουμε ότι $m \geq 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για το $m-1$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (1.1) δύο φορές και το (α) μία, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\right) + a_{mj}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right).$$

5. Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 1.1.4. Απάντηση: η ανισότητα $2^{n-1} \geq n^3$ ισχύει αν και μόνο αν $n = 1$ ή $n \geq 12$, όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $n = 1$.

6. Παρατηρούμε πρώτα ότι η (1.11) ισχύει ως ισότητα για $n = 1$. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το n, θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$, δηλαδή ότι

$$(n+1)^{(n+1)/2} \leq (n+1)! \leq 2((n+1)/2)^{n+1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.11) με το $n+1$ βρίσκουμε ότι

$$(n+1)n^{n/2} \leq (n+1)! \leq 2(n+1)(n/2)^n$$

και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$(n+1)^{(n+1)/2} \leq (n+1)n^{n/2} \quad \text{και} \quad (n+1)(n/2)^n \leq ((n+1)/2)^{n+1}.$$

Οι ανισότητες αυτές γράφονται, ισοδύναμα, ως $(n+1)^{n-1} \leq n^n \leq (n+1)^n/2$ και ως

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geq \frac{1}{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2,$$

αντίστοιχα. Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι οι τελευταίες ανισότητες προκύπτουν αν εφαρμόσουμε κατάλληλα (εξηγήστε πώς) το Παράδειγμα 1.1.2 και την παρατήρηση που ακολουθεί.

7. Παρατηρούμε πρώτα ότι η (1.12) ισχύει ως ισότητα για $n = 0$. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το n, δηλαδή ότι $2^n(n!)^2 \leq (2n)! \leq 4^n(n!)^2$, θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$. Αυτό γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}
& 2^{n+1}((n+1)!)^2 \leq (2n+2)! \leq 4^{n+1}((n+1)!)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2(n+1)^2 \cdot 2^n((n)!)^2 \leq (2n+2)(2n+1)\cdot(2n)! \leq 4(n+1)^2 \cdot 4^n((n)!)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (n+1)\cdot 2^n((n)!)^2 \leq (2n+1)\cdot(2n)! \leq (2n+2)\cdot 4^n(n!)^2
\end{aligned}$$

και έπεται από την υπόθεση, αφού $n+1 \le 2n+1 \le 2n+2$. Από τα παραπάνω και την Πρόταση 1.1.1 (β) συμπεραίνουμε ότι η (1.12) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εργαστείτε ομοίως για να δείξετε ότι το (α) ισχύει επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ το (β) ισχύει μόνο για $n = 0$ και για κάθε $n \ge 7$.

8. Για το (α) εφαρμόστε επαγωγή στο n. Το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α).

9. Για το (α), εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 1.1.3 και, για το επαγωγικό βήμα, προσθέστε το $(a-1)^2 \cdot (n+1)a^{n+1}$ στα δύο μέλη της (1.13). Για το (β), παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
(a-1)^2 \cdot (a + 2a^2 + \cdots + na^n) &= (a-1)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (a^k + a^{k+1} + \cdots + a^n) \\
&= (a-1)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a^k (1 + a + \cdots + a^{n-k}) \\
&= (a-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^k (a^{n-k+1} - 1) \\
&= n(a-1)a^{n+1} - (a-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^k \\
&= na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε την (1.13) για $a = 1$ και να γράψουμε την (1.4) στη μορφή

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

για $x \neq 1$. Παραγωγίζοντας την ισότητα αυτή ως προς x, πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με x και θέτοντας $x = a$, βρίσκουμε ότι η (1.13) ισχύει και για $a \neq 1$. Για το (γ), εφαρμόζοντας την ταυτότητα (1.13) για $a = 2$, βρίσκουμε ότι $\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το (δ) αφήνεται στον αναγνώστη.

10. Έστω S το σύνολο των θετικών ακεραίων με αυτή την ιδιότητα. Από την ταυτότητα

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}$$

προκύπτει ότι αν ισχύει η (1.14) για θετικούς ακεραίους $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, τότε

$$1 = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n+1}},$$

όπου $q_n = p_n + 1$ και $q_{n+1} = p_n(p_n + 1)$, οπότε $p_n < q_n < q_{n+1}$ για $n \ge 2$. Για παράδειγμα, με το σκεπτικό αυτό βρίσκουμε ότι

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \cdots$$

Έχουμε αποδείξει τη συνεπαγωγή $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$ για $n \geq 2$ και ότι $3 \in S$. Αφού $1 \in S$ και $2 \notin S$ (εξηγήστε γιατί), συμπεραίνουμε (Πρόταση 1.1.2) ότι $S = \{1, 3, 4, 5, \dots\}$, δηλαδή ότι τη δοθείσα ιδιότητα έχουν όλοι οι θετικοί ακέραιοι εκτός του 2.

11. Παρατηρούμε ότι $f(n) - f(n-1) = n!$ και συνεπώς ότι $f(n) - f(n-1) = n \cdot (n-1)! = n\,(f(n-1) - f(n-2))$, φτάνοντας με αυτόν τον τρόπο στην αναδρομική σχέση $f(n) = (n+1)f(n-1) - nf(n-2)$ για $n \geq 2$, με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Η άσκηση αυτή τέθηκε ως Πρόβλημα B1 στο διαγωνισμό William Lowell Putnam Mathematical Competition το 1984.

12. Εφαρμόστε επαγωγή στο n, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Για το (στ), χρησιμοποιήστε επίσης την $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$, η οποία αποτελεί μια ισοδύναμη μορφή της (1.7).

13. Θα δείξουμε ότι κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχει αυτή την ιδιότητα με επαγωγή στο m, εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.1.1 (γ). Αυτό είναι φανερό για $m \leq 1$. Υποθέτουμε ότι $m \geq 2$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς μικρότερους του m. Θεωρούμε το μεγαλύτερο $p \in \mathbb{N}$ για το οποίο $F_p \leq m$, η ύπαρξη του οποίου προκύπτει (εξηγήστε γιατί) με εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου στο σύνολο $S = \{m - F_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$. Για παράδειγμα, αν $m = 30$, τότε $k = 8$ και $F_k = 21$. Αφού $m \geq 1$, έχουμε $F_p \geq 1$ και $m - F_p < m$. Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι υπάρχει έκφραση της μορφής

$$m - F_p \;=\; F_{p_1} + F_{p_2} + \cdots + F_{p_k}$$

για κάποιους όρους $F_{p_1} < F_{p_2} < \cdots < F_{p_k}$ της ακολουθίας $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Από τον ορισμό του p έχουμε $m < F_{p+1}$ και συνεπώς $m - F_p < F_{p+1} - F_p = F_{p-1}$. Άρα, οι αριθμοί F_{p_i} είναι όλοι μικρότεροι του F_p και η $m = F_{p_1} + \cdots + F_{p_k} + F_p$ είναι η επιθυμητή έκφραση ως άθροισμα διακεκριμένων όρων της ακολουθίας Fibonacci για το m.

14. Οι αρχικοί όροι της ακολουθίας είναι οι $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$, $a_6 = 5$, $a_7 = 3$, $a_8 = 8$. Δείξτε με επαγωγή στο n ότι $a_{2n} = F_{n+2}$ και $a_{2n+1} = F_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $(F_n)_{n \geq 1}$ είναι η ακολουθία Fibonacci της Άσκησης 12.

15. Για το (α), εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 1.1.9. Για το (β), χρησιμοποιήστε το (α) και εφαρμόστε επαγωγή στο n. Για το (γ), παρατηρήστε ότι $F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} = 2F_{2n-1} + F_{2n-2} = 3F_{2n-1} - F_{2n-3}$ για $n \geq 2$ και δείξτε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.

16. Το ζητούμενο στο (α) ισχύει για $n = 1$. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το $n - 1 \geq 1$, έχουμε $a_{n-1} = \frac{n}{2(n-1)} a_{n-2}$ και υπολογίζουμε ότι

$$a_n \;=\; a_{n-1} - \frac{1}{4}\, a_{n-2} \;=\; a_{n-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2(n-1)}{n}\, a_{n-1} \;=\; \frac{n+1}{2n}\, a_{n-1}.$$

Από την αρχή της επαγωγής, με τη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (β), συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Για το (β), συναγάγετε από το (α) με επαγωγή στο n ότι

$$a_n \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2i} \;=\; \frac{2}{2\cdot 1}\cdot\frac{3}{2\cdot 2}\cdot\frac{4}{2\cdot 3}\cdots\frac{n+1}{2n} \;=\; \frac{n+1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

17. Από τον δοθέντα αναδρομικό τύπο για το a_n προκύπτει ότι

$$b_n \;=\; a_n - na_{n-1} \;=\; -(n-1)a_{n-1} + (n-1)^2 a_{n-2} \;=\; -(n-1)b_{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Από αυτό και τη $b_1 = -1$ έπεται ότι $b_n = (-1)^n(n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, με επαγωγή στο n. Έχουμε απαντήσει στα (α) και (β). Για το (γ), συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι $a_n - na_{n-1} = (-1)^n(n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ισοδύναμα, έχουμε $a_n/n! = a_{n-1}/(n-1)! + (-1)^n/n$ για $n \geq 1$, από όπου προκύπτει ο τύπος

$$a_n \;=\; n!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

με επαγωγή στο n. Για αυτούς που γνωρίζουν απειροστικό λογισμό, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $1 - 1 + 1/2 - 1/3 + \cdots = 1 - \log(2)$.

18. Το (α) αφήνεται στον αναγνώστη. Για τα (β) και (γ), παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}a_{k+2}}{(a_k a_{k+1})^2} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}+a_k)}{(a_k a_{k+1})^2} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{(a_k a_{k+1})^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{a_{k+1}^2}\right) \;=\; \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2}$$

και ότι

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{a_k a_{k+1}} \;=\; \prod_{k=1}^{n} \frac{(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}+a_k)}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}a_{k+2}}{a_k a_{k+1}} \;=\; \frac{a_0 a_{n+2}}{a_n a_2}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Τα όρια για $n \to \infty$ είναι ίσα με $1/a_1^2 = 1$ και $a_0/a_2 \cdot \left((1+\sqrt{5})/2\right)^2 = (3+\sqrt{5})/3$, αντίστοιχα.

19. Το (α) προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του x^k στα ακραία μέλη της

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}x^k \;=\; (1+x+x^2)^n \;=\; (1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2)^{n-1}$$

$$= (1+x+x^2)\cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n-1,k}x^k.$$

Για το (β), θέτουμε

$$\begin{aligned}\sigma_0(n) &= a_{n,0} + a_{n,3} + a_{n,6} + \cdots \\ \sigma_1(n) &= a_{n,1} + a_{n,4} + a_{n,7} + \cdots \\ \sigma_2(n) &= a_{n,2} + a_{n,5} + a_{n,8} + \cdots\end{aligned}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Αθροίζοντας την αναδρομική σχέση $a_{n,3k} = a_{n-1,3k} + a_{n-1,3k-1} + a_{n-1,3k-2}$ για $k \in \mathbb{N}$ παίρνουμε $\sigma_0(n) = \sigma_0(n-1) + \sigma_2(n-1) + \sigma_1(n-1)$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Ομοίως, από τις $a_{n,3k+1} = a_{n-1,3k+1} + a_{n-1,3k} + a_{n-1,3k-1}$ και $a_{n,3k+2} = a_{n-1,3k+2} + a_{n-1,3k+1} + a_{n-1,3k}$ έχουμε ότι $\sigma_1(n) = \sigma_1(n-1) + \sigma_0(n-1) + \sigma_2(n-1)$ και $\sigma_2(n) = \sigma_2(n-1) + \sigma_1(n-1) + \sigma_0(n-1)$, αντίστοιχα. Από τα προηγούμενα προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο n ότι $\sigma_i(n) = 3^{n-1}$ για κάθε θετικό ακέραιο n και κάθε $i \in \{0, 1, 2\}$. Τα (γ) και (δ) αφήνονται στον αναγνώστη.

20. Για $a \geq 2$, εφαρμόζοντας την ταυτότητα (1.4), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}1 + a^2 + \cdots + a^{2n-2} &= \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^n - 1)(a^n + 1)}{(a-1)(a+1)} \\ &= (1 + a + \cdots + a^{n-1}) \cdot \frac{a^n + 1}{a+1}\end{aligned}$$

και συνεπώς ότι

$$\frac{1 + a^2 + \cdots + a^{2n-2}}{1 + a + \cdots + a^{n-1}} = \frac{a^n + 1}{a+1}.$$

Αφού αυτό ισχύει και για $a = 1$, έπεται ότι (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\frac{a^n + 1}{a+1} = \frac{a^n - (-1)^n}{a+1} + \frac{1 + (-1)^n}{a+1}.$$

Αφού, όπως προκύπτει από την (1.4), το $\frac{a^n - (-1)^n}{a+1}$ είναι ακέραιος αριθμός για κάθε n, η συνθήκη (i) ισχύει αν και μόνο αν το $a + 1$ διαιρεί το $1 + (-1)^n$. Προφανώς, αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (iii).

21. Τα (α), (β) και (γ) προκύπτουν άμεσα από τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}a^4 + a^2 + 1 &= (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1), \\ a^8 + a^4 + 1 &= (a^4 + a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) \\ &= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1), \\ a^5 + a + 1 &= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1).\end{aligned}$$

Για το (δ), ας θέσουμε $x = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ και $y = a^{24} + a^{18} + a^{12} + a^6 + 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \mid y - x$ αφού τότε, σύμφωνα με τα (α) και (δ) της Πρότασης 1.1.3, θα έχουμε και $x \mid x + (y - x) = y$. Παρατηρούμε ότι

$$y - x = (a^{24} - a^4) + (a^{18} - a^3) + (a^{12} - a^2) + (a^6 - a)$$

$$= a^4(a^{20}-1) + a^3(a^{15}-1) + a^2(a^{10}-1) + a(a^5-1).$$

Από τη βασική μας ταυτότητα (1.4) προκύπτει ότι το $a^5 - 1$ διαιρεί καθένα από τα $a^{20}-1$, $a^{15}-1$, $a^{10}-1$ και a^5-1. Άρα, σύμφωνα με το (δ) της Πρότασης 1.1.3, το a^5-1 διαιρεί και το $a^4(a^{20}-1)+a^3(a^{15}-1)+a^2(a^{10}-1)+a(a^5-1) = y-x$. Από την άλλη, λόγω της ταυτότητας (1.4), το a^5-1 διαιρείται από το $a^4+a^3+a^2+a+1 = x$, οπότε $x \mid a^5-1$ και $a^5-1 \mid y-x$. Άρα, σύμφωνα με το (γ) της Πρότασης 1.1.3, $x \mid y-x$.

22. Για το (α), υπολογίζοντας το $a_{n+1} - 6a_n$, βρίσκουμε ότι $a_{n+1} = 6a_n + 25n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το (β) προκύπτει άμεσα από τη σχέση αυτή με επαγωγή στο n. Για το (γ), δείξτε με επαγωγή στο n ότι το a_n αφήνει υπόλοιπο 0, 0, 25, 75 ή 25 διαιρούμενο με το 125, αν το n αφήνει υπόλοιπο 0, 1, 2, 3 ή 4 διαιρούμενο με το 5, αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, το a_n διαιρείται με το 125 αν και μόνο αν $n = 5q$ ή $n = 5q+1$ για κάποιο $q \in \mathbb{N}$.

23. Τα (α) και (β) είναι ειδικές περιπτώσεις της ταυτότητας της Άσκησης 24 (α). Εναλλακτικά, μπορούν να αποδειχθούν ταυτόχρονα με επαγωγή στο n. Πράγματι, οι ισότητες $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ και $F_{2n} = F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$ ισχύουν για $n=1$. Υποθέτοντας ότι ισχύουν για το n, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= F_{2n} + F_{2n-1} \;=\; F_n(F_{n+1}+F_{n-1}) \;+\; (F_n^2 + F_{n-1}^2) \\ &= F_n^2 + F_nF_{n+1} + F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) \;=\; F_n^2 + F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} \\ &= F_n^2 + F_{n+1}^2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} F_{2n+2} &= F_{2n+1} + F_{2n} \;=\; (F_{n+1}^2 + F_n^2) \;+\; F_n(F_{n+1}+F_{n-1}) \;= \\ &= F_{n+1}(F_{n+1}+F_n) \;+\; F_n(F_n + F_{n-1}) \;=\; F_{n+1}F_{n+2} + F_nF_{n+1} \\ &= F_{n+1}(F_{n+2}+F_n). \end{aligned}$$

24. Το ζητούμενο στο (α) είναι τετριμμένο για $n=1$. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το $n \ge 1$ και για κάθε $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{m+(n+1)} &= F_{(m+1)+n} \;=\; F_{m+2}F_n \;+\; F_{m+1}F_{n-1} \\ &= (F_{m+1}+F_m)F_n \;+\; F_{m+1}F_{n-1} \;=\; F_{m+1}(F_n + F_{n-1}) \;+\; F_mF_n \\ &= F_{m+1}F_{n+1} \;+\; F_mF_n \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Από την αρχή της επαγωγής, στη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (β), συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και κάθε $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει την (1.16) με επαγωγή στο n. Θέτοντας όπου n το $m+n$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει η ταυτότητα του (α). Για το (γ) χρησιμοποιήστε το (α) και εφαρμόστε επαγωγή στο $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, όπου $n = md$.

25. Εφαρμόζουμε την αρχή του ελαχίστου, εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 1.1.1. Συμβολίζουμε με S το σύνολο των ακεραίων μεγαλύτερων του ένα που δεν μπορούν να γραφτούν ως γινόμενα πρώτων αριθμών και υποθέτουμε ότι $S \neq \emptyset$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (α), το S έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το n. Αφού το S προφανώς δεν περιέχει πρώτους αριθμούς, έχουμε $n = ab$ για κάποιους ακεραίους $a, b \geq 2$. Τότε $a, b < n$ και συνεπώς $a, b \notin S$. Αυτό σημαίνει ότι οι a και b γράφονται ως γινόμενα πρώτων αριθμών, οπότε το ίδιο ισχύει για το γινόμενό τους $ab = n$, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι $n \in S$. Από την αντίφαση αυτή οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $S = \emptyset$, που ήταν το ζητούμενο.

26. Για την ύπαρξη, θεωρήστε το σύνολο $S = \{n - mq : q \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ και δείξτε ότι $S \neq \emptyset$. Ορίστε το r ως το ελάχιστο στοιχείο του S και εργαστείτε όπως στη λύση της Άσκησης 2 για να δείξετε ότι $r < m$. Για τη μοναδικότητα, υποθέστε ότι $n = mq + r$ και $n = mp + s$ είναι δύο τέτοιες παραστάσεις του n. Από τις ανισότητες $mp \leq n = mq + r < mq + m$, συμπεράνετε ότι $p \leq q$. Δείξτε ομοίως ότι $q \leq p$ και συμπεράνετε ότι $p = q$ και $r = s$.

27. Θα εφαρμόσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, με τη μορφή της Πρότασης 1.1.1 (β). Το ζητούμενο είναι τετριμμένο για $k = 0$. Υποθέτουμε ότι $k \geq 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για τον $k - 1$ (και όλους τους ακεραίους $m \geq 2$). Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον k. Έστω ακέραιος $0 \leq n < m^{k+1}$. Από την Πρόταση 1.1.4, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r τέτοιοι ώστε

$$n = r + mq \tag{1.18}$$

και $0 \leq r < m$. Από την υπόθεση $n \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι $q \geq 0$. Έχουμε επίσης $qm \leq qm + r = n < m^{k+1}$, οπότε $0 \leq q < m^k$. Επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, ο q αναπαρίσταται στη μορφή

$$q = a_1 + a_2 m + \cdots + a_k m^{k-1} \tag{1.19}$$

για μοναδικά $a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Θέτοντας $r = a_0$, από τις (1.18) και (1.19) προκύπτει ότι ο n αναπαρίσταται στη μορφή (1.10). Για τη μοναδικότητα, έστω ότι η

$$n = b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + \cdots + b_k m^k$$

είναι επίσης m-αδική αναπαράσταση του n. Μπορούμε να γράψουμε $n = b_0 + tm$, όπου $b_0 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ και

$$t = b_1 + b_2 m + \cdots + b_k m^{k-1}. \tag{1.20}$$

Από την (1.18) και τη μοναδικότητα στην Πρόταση 1.1.4 συμπεραίνουμε ότι $b_0 = r = a_0$ και $t = q$. Από την τελευταία ισότητα και τη μοναδικότητα της αναπαράστασης (1.19) προκύπτει επίσης ότι $b_i = a_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και συνεπώς την απόδειξη της πρότασης.

28. (α) Απάντηση: $f(2018) = 7$.

(βγ) Δίνουμε πρώτα έναν μη αναδρομικό ορισμό της f. Από την Πρόταση 1.1.5 για $m = 2$ (δυαδική παράσταση) προκύπτει ότι κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_r}$ δυνάμεων του 2, για φυσικούς αριθμούς $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$. Ας θεωρήσουμε το πλήθος $g(n) = r$ των δυνάμεων του 2 στην παράσταση αυτή. Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$ και ότι $g(2n) = g(n)$ και $g(2n+1) = g(n) + 1$, για $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Από την Πρόταση 1.1.1 (β) συμπεραίνουμε ότι $f(n) = g(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ως άμεση συνέπεια, για $1000 \le n \le 2000$ έχουμε $f(n) = 2$ αν και μόνο αν $n = 2^{10} + 2^k$ με $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Υποθέτοντας τώρα ότι $f(n) = n/3$, οπότε $g(n) = n/3$, και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (1.4), βρίσκουμε ότι

$$n \ \ge\ 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n/3-1} \ =\ 2^{n/3} - 1$$

ή, ισοδύναμα, ότι $(n+1)^3 \ge 2^n$. Από τη λύση της Άσκησης 5 προκύπτει ότι $n \le 10$. Απορρίπτοντας τις τιμές $n \in \{3, 9\}$, συμπεραίνουμε ότι ο $n = 6$ είναι ο μόνος φυσικός αριθμός με $f(n) = n/3$.

29. Έστω $X = \mathbb{N}$. Για το (α), ορίστε την R θέτοντας xRy αν $y \in \{x, x+1\}$ για $x, y \in \mathbb{N}$ και δείξτε ότι $\Gamma_{R^n} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \le y \le x + n\}$. Για το (β), ορίστε την R θέτοντας xRy αν $x < y$ για $x, y \in \mathbb{N}$ και δείξτε ότι $\Gamma_{R^n} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + n \le y\}$.

30. (α) Εφαρμόζουμε επαγωγή στο n. Το ζητούμενο είναι τετριμμένο για $n = 1$ και ταυτόσημο με τον ορισμό (1.17) για $i = n - 1$ (οπότε ισχύει και για $n = 2$). Υποθέτοντας ότι $n \ge 3$ και $i \in [n-2]$, καθώς και ότι το ζητούμενο ισχύει για το $n - 1$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n &= (a_1 \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n \\ &= ((a_1 \circ \cdots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_{n-1})) \circ a_n \\ &= (a_1 \circ \cdots \circ a_i) \circ ((a_{i+1} \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n) \\ &= (a_1 \circ \cdots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_n), \end{aligned}$$

όπου έχουμε εφαρμόσει διαδοχικά τον ορισμό (1.17), την υπόθεση της επαγωγής, την προσεταιριστική ιδιότητα και τον ορισμό (1.17) για δεύτερη φορά. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1 (β), το ζητούμενο ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n.

(β) Η πρώτη ταυτότητα είναι ειδική περίπτωση της (1.17). Για τη δεύτερη, παρατηρήστε ότι αν $(a^m)^n = a^{mn}$, τότε

$$(a^m)^{n+1} \ =\ (a^m)^n \circ a^m \ =\ a^{mn} \circ a^m \ =\ a^{mn+m} \ =\ a^{m(n+1)}$$

και συμπεράνετε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.

31. Ας επαληθεύσουμε το (α). Θέτουμε $C := (\cup_{i=1}^n A_i) \cap B$ και $D := \cup_{i=1}^n (A_i \cap B)$ και υποθέτουμε ότι $x \in C$, οπότε $x \in \cup_{i=1}^n A_i$ και $x \in B$. Τότε, $x \in A_i$ για τουλάχιστον έναν δείκτη $i \in [n]$ και $x \in B$. Άρα, $x \in A_i \cap B$ για τουλάχιστον ένα $i \in [n]$, οπότε $x \in \cup_{i=1}^n (A_i \cap B) = D$. Δείξαμε ότι $C \subseteq D$. Αντιστρέφοντας τα παραπάνω βήματα βρίσκουμε ότι $D \subseteq C$ και συμπεραίνουμε ότι $C = D$. Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει με παρόμοιο τρόπο τις υπόλοιπες ταυτότητες.

32. Απάντηση: Ορίζονται οι απεικονίσεις στα (α), (δ). Στο (β) δεν ορίζεται το $f(\mathbb{N})$, αφού το σύνολο $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο (δεν έχει καθόλου στοιχεία). Στο (γ) έχουμε $f(0) = -1 \notin Y$. Στο (ε) προκύπτουν δύο διαφορετικές τιμές για το $f(6)$.

33. Για το (α), δείξτε ότι $f(x) \leq 1$, αν $x \leq 1$. Για το (β), υπολογίστε πρώτα το $f^n(x)$ για μικρές τιμές του n. Για παράδειγμα,

$$f^2(x) \;=\; f(f(x)) \;=\; \frac{1}{2-f(x)} \;=\; \frac{1}{2-1/(2-x)} \;=\; \frac{2-x}{3-2x}.$$

Έπειτα, δείξτε με επαγωγή στο n ότι

$$f^n(x) \;=\; \frac{n-(n-1)x}{n+1-nx},$$

για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$.

34. (α) Έστω ότι η f είναι 1–1. Για $y \in Y$, ορίζουμε ως $g(y)$ το μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $f(x) = y$, αν $y \in f(X)$, και ένα οποιοδήποτε στοιχείο του X, διαφορετικά. Τότε, η $g : Y \to X$ είναι απεικόνιση με την επιθυμητή ιδιότητα. Αντιστρόφως, αν υπάρχει τέτοια $g : Y \to X$, τότε για $x_1, x_2 \in X$ έχουμε $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ και συνεπώς η f είναι 1–1.

(β) Έστω ότι η f είναι επί. Για $y \in Y$, ορίζουμε ως $g(y)$ οποιοδήποτε στοιχείο $x \in X$ με $f(x) = y$ (τέτοιο στοιχείο υπάρχει). Τότε, η $g : Y \to X$ είναι απεικόνιση με την επιθυμητή ιδιότητα. Το αντίστροφο είναι φανερό.