ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Δύο παιχνίδια με σπίρτα*

I. M. Yaglom

Σε αυτό το άρθρο θα μιλήσουμε για τα παιχνίδια «Nim» και «Tsyan-shizi». Και τα δύο είναι κινέζικα παραδοσιακά παιχνίδια· η μετάφραση του «Tsyan-shizi» είναι «σηκώνω χαλίκια» (φυσικά, η αντικατάσταση των χαλικιών με σπίρτα στα παιχνίδια είναι μια επουσιώδης αλλαγή). Τα παιχνίδια αυτά αργότερα διαδόθηκαν στην Ευρώπη, και κάποια εποχή το παιχνίδι Nim ήταν δημοφιλές στη Δυτική Ευρώπη.

Ας περιγράψουμε τους κανόνες αυτών των παιχνιδιών.

Το παιχνίδι Nim

Σε ένα τραπέζι υπάρχουν τρεις σωροί με σπίρτα. Δύο παίκτες παίρνουν εναλλάξ σπίρτα από αυτούς τους σωρούς, και ο κάθε παίκτης, στον δικό του γύρο, μπορεί να πάρει οσαδήποτε σπίρτα από έναν (*και μόνο έναν*!) *από τους σωρούς. Ο νικητής είναι εκείνος που θα πάρει το τελευταίο σπίρτο*.†

Το παιχνίδι Tsyan-shizi

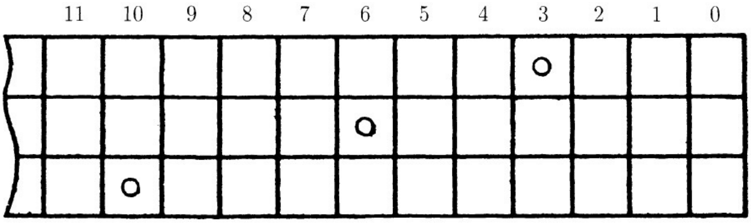
Σε ένα τραπέζι υπάρχουν δύο σωροί με σπίρτα. Δύο παίκτες παίρνουν εναλλάξ σπίρτα από αυτούς τους σωρούς, και ο κάθε παίκτης μπορεί να πάρει στον δικό του γύρο είτε όσα σπίρτα θέλει από έναν σωρό είτε τον ίδιο αριθμό από σπίρτα και από τους δύο σωρούς (*όπου ο αριθμός αυτός μπορεί επίσης να είναι οποιοσδήποτε*!). *Ο νικητής είναι εκείνος που θα πάρει το τελευταίο σπίρτο*.

Το πρόβλημα είναι *να προσδιοριστούν οι αρχικές θέσεις* (δηλαδή, οι αριθμοί των σπίρτων σε κάθε σωρό) *για τις οποίες ο πρώτος παίκτης μπορεί να νικήσει*

---

*Το ρωσικό πρωτότυπο δημοσιεύτηκε στο *Kvant* 1971, αρ. 2, σσ. 4-10.

†Σ.τ.Ε.: Το παιχνίδι Nim εξετάζεται και στο Κεφ. 15 του βιβλίου *Μαθηματικοί κύκλοι - η ρωσική εμπειρία*, εκδ. Εφαλτήριο, Αθήνα, 2022.



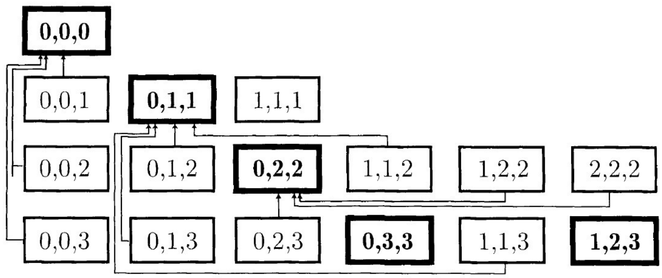
Εικόνα 1

και οι αρχικές θέσεις για τις οποίες δεν μπορεί να νικήσει (*με δεδομένο ότι ο δεύτερος παίκτης θα παίξει κατάλληλα*), *και να προσδιοριστεί μια ορθή* (*νικηφόρα*) *τακτική παιχνιδιού*.

Πρακτικά, είναι πολύ πιο εύκολο να παίζεται το Nim ή το Tsyan-shizi στον μαυροπίνακα – χωρίς κανένα σπίρτο αλλά με κιμωλία και σπόγγο στο χέρι. Μπορεί κανείς, ας πούμε, να σχεδιάσει στον μαυροπίνακα τρεις σειρές με κουτάκια που να τελειώνουν κάπου προς τα δεξιά του πίνακα, και τρεις κύκλους, έναν σε κάθε σειρά από κουτάκια (Εικόνα 1). Ο κάθε παίκτης, όταν είναι η σειρά του να παίξει, σβήνει έναν από τους κύκλους και τον «μετακινεί» όσα κουτάκια θέλει προς τα δεξιά (αν το παιχνίδι είναι το Nim)· ο νικητής είναι εκείνος που θα κάνει την τελευταία κίνηση. Το Tsyan-shizi μπορεί να παιχτεί με τον ίδιο τρόπο, με τη διαφορά ότι τώρα ο μαυροπίνακας έχει δύο σειρές με κουτάκια, και ο κάθε παίκτης, όταν είναι η σειρά του, είτε μετακινεί έναν κύκλο προς τα δεξιά, είτε μετακινεί και τους δύο κύκλους προς τα δεξιά κατά τον ίδιο αριθμό από κουτάκια.

Ας παίξουμε Nim

Ας υποθέσουμε ότι οι τρεις σωροί περιέχουν a, b και c σπίρτα, αντίστοιχα, όπου $a \leq b \leq c$· η τριάδα (a, b, c) είναι η *κατάσταση* ή η *θέση* του παιχνιδιού τη δεδομένη στιγμή. Είναι προφανές ότι η $(0, 1, 1)$ είναι *ηττώμενη* θέση για τον πρώτο παίκτη: είναι αναγκασμένος όταν παίξει να πάρει ένα από τα δύο σπίρτα, οπότε ο αντίπαλός του θα πάρει το δεύτερο και θα νικήσει. Όλες οι άλλες θέσεις της μορφής $(0, 1, c)$ με $c \geq 2$ είναι *νικηφόρες* θέσεις για τον πρώτο παίκτη: όταν παίξει μπορεί να πάρει $c - 1$ σπίρτα από τον τρίτο σωρό, αφήνοντας τη συγκεκριμένη ηττώμενη θέση $(0, 1, 1)$ για τον αντίπαλό του. Η επόμενη *ηττώμενη* θέση για τον πρώτο παίκτη είναι η τριάδα $(0, 2, 2)$: διότι αν πάρει ένα σπίρτο, τότε στην επόμενη κίνηση ο αντίπαλός του θα τον αφήσει στη θέση $(0, 1, 1)$, ενώ αν πάρει δύο σπίρτα, τότε στην επόμενη κίνηση ο αντίπαλός του θα τελειώσει το παιχνίδι (δηλαδή θα νικήσει). Όλες οι υπόλοιπες θέσεις $(0, 2, c)$ με $c \geq 3$ είναι *νικηφόρες* για τον πρώτο παίκτη, διότι όταν παίξει μπορεί να πάρει $c - 2$ σπίρτα και να αφήσει στον αντίπαλό του την (ηττώμενη!) θέση $(0, 2, 2)$. Οι επόμενες θέσεις που είναι *ηττώμενες* για τον πρώτο



Εικονα 2

παίκτη έχουν τη μορφή $(1, 2, 3)$ και $(0, 3, 3)$: εδώ, μετά από κάθε κίνηση του πρώτου παίκτη, ο αντίπαλός του μπορεί είτε να *νικήσει* αμέσως είτε να φέρει το παιχνίδι σε μία από τις θέσεις $(0, 1, 1)$ και $(0, 2, 2)$ που εξετάσαμε παραπάνω (βλ. Εικόνα 2, όπου τα πλαίσια με έντονα στοιχεία αναπαριστούν ηττώμενες θέσεις για τον πρώτο παίκτη και τα βέλη αναπαριστούν κινήσεις).

Συνεχίζοντας με το ίδιο σκεπτικό, μπορούμε να καταρτίσουμε έναν πίνακα αρχικών θέσεων που είναι ηττώμενες για τον πρώτο παίκτη: *ένας παίκτης που είναι αναγκασμένος να κάνει μια κίνηση ξεκινώντας από μια τέτοια θέση θα βρεθεί αναπόφευκτα σε μια θέση που είναι νικηφόρα για τον αντίπαλό του* (δηλαδή, σε μια θέση που δεν περιλαμβάνεται στον πίνακά μας)˙ αντίστροφα, *αν μια θέση δεν είναι ηττώμενη, τότε ο παίκτης που είναι η σειρά του να παίξει μπορεί είτε να νικήσει αμέσως είτε να φέρει το παιχνίδι σε μια ηττώμενη θέση, «εγκλωβίζοντας» με αυτό τον τρόπο τον αντίπαλό του σε αυτή την ηττώμενη θέση*. Στον Πίνακα I έχουμε συγκεντρώσει τις πρώτες δεκαπέντε τέτοιες θέσεις.*

Πινακας I. Ηττώμενες θέσεις στο Nim

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	2	0	3	2	1	0	0	1
b	1	2	2	3	4	4	5	4	6	4	5	6	7	8	8
c	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	7	7	8	9

Προσπαθούμε να διακρίνουμε στη δομή του πίνακα μια γενική κανονικότητα, έναν κανόνα για το πώς μπορεί να καταρτιστεί αυτός. Ωστόσο, εκ πρώτης όψεως δεν φαίνεται να υπάρχει κανένας εμφανής νόμος από τον οποίο να απορρέει ένας τέτοιος κανόνας.

*Σ.τ.Ε.: σε λεξικογραφική διάταξη των διατεταγμένων τριάδων (c, b, a)˙ στη μηδενική θέση θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπάρχει η τριάδα $(0, 0, 0)$, βλ. υποσημείωση στη σελ. 8.

Το παιχνίδι Tsyan-shizi

Ας υποθέσουμε ότι οι δύο σωροί μας περιέχουν a και b σπίρτα, αντίστοιχα, όπου $a \leq b$· το ζεύγος αριθμών (a, b) ονομάζεται *κατάσταση* ή *θέση* του παιχνιδιού τη δεδομένη στιγμή. Αναζητούμε και πάλι τις θέσεις που είναι ηττώμενες για τον πρώτο παίκτη. Η πρώτη τέτοια θέση είναι η $(1, 2)$. Υπάρχουν τέσσερεις δυνατές κινήσεις συνολικά: μπορεί να πάρει 1 σπίρτο από τον πρώτο σωρό, ή 1 σπίρτο από τον δεύτερο σωρό, ή 2 σπίρτα από τον δεύτερο σωρό, ή, τέλος, 1 σπίρτο από τον κάθε σωρό. Είναι φανερό ότι για κάθε δυνατή κίνηση του πρώτου παίκτη, ο αντίπαλός του τελειώνει το παιχνίδι στην επόμενη κίνηση, δηλαδή νικά. Όλες οι υπόλοιπες κινήσεις όπου ένας από τους δύο αριθμούς a και b ισούται με 1 ή με 2 ή όπου η διαφορά $b - a$ ισούται με 1 είναι *νικηφόρες* θέσεις για τον πρώτο παίκτη: αν σε αυτή τη θέση είναι αδύνατον να τελειώσει το παιχνίδι σε μία κίνηση (δηλαδή, να νικήσει αμέσως), τότε μπορεί να φέρει το παιχνίδι στη θέση $(1, 2)$, η οποία είναι νικηφόρα για τον πρώτο παίκτη. Η επόμενη *ηττώμενη* θέση είναι η $(3, 5)$: εδώ, μετά από κάθε κίνηση του πρώτου παίκτη ο αντίπαλός του είτε νικά αμέσως είτε φέρνει το παιχνίδι στη θέση $(1, 2)$. Όλες οι υπόλοιπες θέσεις (a, b) όπου ένα από τα a και b ισούται με 3 ή 5 ή όπου $b - a = 2$ είναι *νικηφόρες* για τον πρώτο παίκτη· η επόμενη *ηττώμενη* θέση για τον πρώτο παίκτη είναι η $(4, 7)$. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να καταρτίσουμε έναν πίνακα θέσεων οι οποίες είναι ηττώμενες για τον πρώτο παίκτη.

Πινακας II. Ηττώμενες θέσεις στο Tsyan-shizi

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
b	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

Δυστυχώς, και σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει κανένας εμφανής νόμος για το πώς μπορεί να καταρτιστεί ο πίνακας.

Μήπως όμως μπορούμε να γράψουμε τους Πίνακες I και II με διαφορετικό τρόπο;

Δεν καταφέραμε να διακρίνουμε κάποια μοτίβα στους Πίνακες I και II, οι οποίοι αποτελούνται από τρεις σειρές αριθμών στην πρώτη περίπτωση και από δύο σειρές στη δεύτερη περίπτωση. Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε τους πιθανούς λόγους για αυτή την αποτυχία μας.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι Πίνακες I και II είναι αριθμητικοί· αποτελούνται από σειρές (γραμμές) αριθμών. Φυσικά, γράψαμε τους αριθμούς σε αυτούς τους πίνακες με τον συνηθισμένο τρόπο, χρησιμοποιώντας το καθολικά αποδεκτό δεκαδικό αριθμητικό σύστημα. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 24 και 39 στην τελευταία στήλη του Πίνακα II σημαίνουν: «2 δεκάδες και 4 μονάδες», και «3 δεκάδες και 9 μονάδες». Ωστόσο, αυτό καθεαυτό το δεκαδικό σύστημα, του οποίου η προέλευση σχετίζεται με το τυχαίο γεγονός ότι εμείς οι άνθρωποι έχουμε 10 δάχτυλα στα χέρια μας, δεν συνδέεται με κανέναν τρόπο με τα παιχνίδια που εξετάζουμε· επομένως, δεν φαίνεται αταίριαστο να προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τους πίνακές μας με διαφορετικό τρόπο.

Η συνέχεια αυτού του άρθρου συνδέεται με το άρθρο «Αριθμητικά συστήματα» (*Kvant* 1971, αρ. 6). Από το εν λόγω άρθρο χρειαζόμαστε τα παρακάτω δεδομένα.

Υπάρχουν πολλά συστήματα γραφής των θετικών ακεραίων μέσω ενός μικρού αριθμού συμβόλων (ψηφίων). *Τα θεσιακά αριθμητικά συστήματα* (τα οποία ακριβέστερα θα έπρεπε να ονομάζονται *θεσιακά συστήματα για τη γραφή αριθμών*) κατασκευάζονται ως εξής. Καθορίζεται μια *βάση* ή ένα *σύστημα βασικών αριθμών*, το οποίο είναι μια άπειρη αύξουσα ακολουθία ακεραίων:

$$1 = q_0 < q_1 < q_2 < q_3 < \cdots . \qquad (*)$$

Κατόπιν αυτού, κάθε αριθμός N αναπαριστάται ως άθροισμα των αριθμών της βάσης μας, στο οποίο οι αριθμοί αυτοί έχουν διάφορους ακέραιους συντελεστές:

$$N = a_m q_m + a_{m-1} q_{m-1} + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0 q_0.$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφτεί στη μορφή $N = a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 a_0$, όπου $a_m, a_{m-1}, \dots$ είναι τα «ψηφία» στην έκφραση για το N.

Για παράδειγμα, αν το σύστημα των αριθμών βάσης είναι το

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots ,$$

τότε ο αριθμός 27 γράφεται στη μορφή

$$27 = 1{\cdot}23{+}0{\cdot}19{+}0{\cdot}17{+}0{\cdot}13{+}0{\cdot}11{+}0{\cdot}7{+}0{\cdot}5{+}1{\cdot}3{+}0{\cdot}2{+}1{\cdot}1 = «1000000101».$$

Επιπλέον, το k-οστό ψηφίο a_k στην έκφραση για οποιονδήποτε αριθμό N στο αριθμητικό σύστημα με βάση $(*)$ είναι πάντοτε μικρότερο από τον λόγο q_{k+1}/q_k.*

*Σ.τ.Ε.: Με τον τρόπο που έχει οριστεί εδώ το θεσιακό σύστημα, η αναπαράσταση δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδική, π.χ. $27 = 1 \cdot 13 + 1 \cdot 11 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1100100$. Ωστόσο, στο σύστημα αρίθμησης που έχει ως βάση τις δυνάμεις του 2 η αναπαράσταση είναι μοναδική και αποτελείται μόνο από ψηφία 0 και 1.

Αν η βάση του αριθμητικού συστήματος έχει τη μορφή

$$1 = q^0, q = q^1, q^2, q^3, q^4, \dots,$$

όπου q είναι κάποιος θετικός ακέραιος, τότε λέμε ότι το αριθμητικό σύστημα είναι το *q-αδικό σύστημα*· σε αυτό, όλοι οι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν ως αθροίσματα *δυνάμεων του* q, και όλα τα ψηφία στην έκφραση για έναν αριθμό N είναι μικρότερα του q (μικρότερα του 10 στην περίπτωση του καθολικά χρησιμοποιούμενου δεκαδικού αριθμητικού συστήματος).

Το απλούστερο δυνατό σύστημα για την αναπαράσταση ακεραίων είναι το *δυαδικό* αριθμητικό σύστημα, στο οποίο όλοι οι αριθμοί αναπαριστώνται με αθροίσματα διαφορετικών δυνάμεων του αριθμού 2. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτό το αριθμητικό σύστημα, τότε οι Πίνακες I και II παίρνουν πολύ διαφορετική μορφή (οι αριθμοί στις γραμμές a, b και c στους Πίνακες Iα και IIα είναι γραμμένοι στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα):

Πινακας Iα

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	10	0	11	10	1	0	0	1
b	1	10	10	11	100	100	101	100	110	100	101	110	111	1000	1000
c	1	10	11	11	100	101	101	110	110	111	111	111	111	1000	1001

Πινακας IIα

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	11	100	110	1000	1001	1011	1100	1110
b	10	101	111	1010	1101	1111	10010	10100	10111

#	10	11	12	13	14	15
a	10000	10001	10011	10101	10111	11000
b	11010	11100	111111	100010	100100	100111

Αν μελετήσουμε προσεκτικά τον Πίνακα Iα, μπορούμε να διακρίνουμε σε αυτόν ένα αρκετά σαφές μοτίβο: πράγματι, *οι ηττώμενες θέσεις* (a, b, c) *στο παιχνίδι Nim είναι εκείνες στις οποίες το άθροισμα των ψηφίων σε κάθε θέση στις δυαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών a, b και c είναι άρτιο* (δηλαδή, ίσο με 0 ή 2)! Ωστόσο, ο Πίνακας IIα δεν είναι εξίσου ευνόητος. Τίποτα δεν φαίνεται να τον βελτιώνει σε σχέση με τον Πίνακα II, και είναι αδύνατον να εντοπίσουμε σε αυτόν οποιαδήποτε σαφή κανονικότητα στη συγκρότηση των ηττώμενων ζευγών (a, b).

Αλλά γιατί θα έπρεπε το δυαδικό αριθμητικό σύστημα να μας δίνει το κλειδί για την εύρεση ενός συστήματος νικηφόρας τακτικής στο Tsyan-shizi; Σύμφωνοι, το σύστημα αυτό φαίνεται να διευκολύνει την ανάλυση της θεωρίας του παιχνιδιού Nim, αλλά το Tsyan-shizi είναι ένα εντελώς διαφορετικό παιχνίδι, και ένα κλειδί που ανοίγει μια πόρτα προφανώς δεν είναι απαραίτητο να ταιριάζει και σε μια άλλη. Πιθανόν να μπορούμε να ξαναγράψουμε τον Πίνακα II με διαφορετικό τρόπο: ίσως ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης των αριθμών που σχηματίζουν αυτό τον πίνακα να μπορεί να διαφωτίσει περισσότερο τη δομή του.

Με προσεκτική μελέτη του Πίνακα II διαπιστώνουμε ότι εμφανίζονται συχνά σε αυτόν οι *αριθμοί Fibonacci* (για παράδειγμα, δείτε τις στήλες 1, 2, 5 και 13 του πίνακα).* Το γεγονός αυτό, με τη σειρά του, φαίνεται να υποδεικνύει ότι θα ήταν χρήσιμο να γράψουμε τον Πίνακα II στο «αριθμητικό σύστημα Fibonacci», όπου όλοι οι αριθμοί αναπαριστώνται με αθροίσματα αριθμών της ακολουθίας Fibonacci (οι αριθμοί στις γραμμές a και b του Πίνακα IIβ είναι γραμμένοι στο αριθμητικό σύστημα Fibonacci). Για παράδειγμα, ο αριθμός 100 είναι το 1000010100 στο αριθμητικό σύστημα Fibonacci, δηλαδή $100 = 1 \cdot 89 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3$.

Ας ξαναγράψουμε τώρα τον Πίνακα II στο αριθμητικό σύστημα Fibonacci [Σ.τ.Ε.: με τον μοναδικό τρόπο ο οποίος περιγράφεται στην κάτωθι υποσημείωση]:

---

*Οι αριθμοί Fibonacci είναι η ακολουθία αριθμών που ξεκινάει με τα 1 και 2 και στη συνέχεια κατασκευάζεται σύμφωνα με τον εξής κανόνα: *κάθε αριθμός της ακολουθίας Fibonacci ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων αριθμών*. Οι πρώτοι όροι είναι οι $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$. Οι αριθμοί Fibonacci αναλύονται στο γνωστό ομώνυμο βιβλιαράκι του N. N. Vorob′ev (3η έκδ., «Nauka», Μόσχα, 1969). [Σ.τ.Ε.: Οι αριθμοί Fibonacci είναι μια ακολουθία όπου οι δύο πρώτοι όροι είναι 1 και κάθε επόμενος όρος είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Για να είμαστε συναφείς με το θεσιακό σύστημα θα αγνοήσουμε τον πρώτο όρο και θα θέσουμε $1 = F_0 < 2 = F_1 < 3 = F_2 < 5 = F_3 < 8 = F_4 < 13 = F_5$. Η αναπαράσταση εδώ επίσης δεν είναι μοναδική, αφού $3 = 11$ και $3 = 100$. Ωστόσο, μπορούμε να επιλέξουμε μια μοναδική αναπαράσταση για κάθε αριθμό τοποθετώντας τα ψηφία από αριστερά προς τα δεξιά. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ο αριθμός $k = 17$. Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που είναι μικρότερος ή ίσος του 17 είναι ο $F_5 = 13$. Απομένει να εκφράσουμε τον αριθμό $17 - 13 = 4$. Επειδή $F_4 = 8, F_3 = 5$, τα ψηφία των F_4, F_3 είναι 0. Τώρα ο επόμενος αριθμός Fibonacci που είναι μικρότερος ή ίσος του 4 είναι το $F_2 = 3$. Το υπόλοιπό μας τώρα είναι ο αριθμός $17 - 13 - 3 = 1$. Προφανώς ο F_1 έχει ψηφίο 0 και ο F_0 ψηφίο 1. Άρα, $17 = 100101$.]

Πινακας IIβ

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	100	101	1001	10000	10001	10100	10101	100001
b	10	1000	1010	10010	100000	100010	101000	101010	1000010

#	10	11	12	13	14	15
a	100100	100101	101001	1000000	1000001	1000100
b	1001000	1001010	1010010	10000000	10000010	10001000

Πλέον δεν υπάρχει καμία αμφιβολία για τον κανόνα του σχηματισμού ηττώμενων ζευγών: *ένα ζεύγος αριθμών* (a, b)*, με* $a < b$*, οι οποίοι είναι γραμμένοι στο σύστημα Fibonacci ορίζει μια ηττώμενη θέση στο παιχνίδι Tsyan-shizi αν το* a *τελειώνει σε άρτιο αριθμό μηδενικών,** *και το* b *προκύπτει από το* a *με την προσθήκη ενός μηδενικού στο τέλος.*

Εικασία; Όχι, θεώρημα!

Έχουμε πλέον σχεδόν φτάσει στον στόχο μας: απ' ό,τι φαίνεται, έχουμε βρει ποιες θέσεις στα παιχνίδια Nim και Tsyan-shizi είναι ηττώμενες για τον πρώτο παίκτη, και ποιες είναι νικηφόρες. Ωστόσο, οι μαθηματικοί δεν αναγνωρίζουν την έκφραση «απ' ό,τι φαίνεται»· επίλυση ενός προβλήματος στα μαθηματικά σημαίνει όχι μόνο (και όχι τόσο πολύ!) να *εικάσουμε* ποια θα είναι η λύση του προβλήματος, αλλά και να *αποδείξουμε* ότι η εικασία μας είναι σωστή.

Η απόδειξη της ορθότητας του μοτίβου που έχουμε παρατηρήσει στη σύσταση των ηττώμενων θέσεων προχωράει ως εξής: *να δειχθεί ότι σε καθένα από τα δύο παιχνίδια υπάρχει ένα σύστημα θέσεων* (τις οποίες μπορούμε να αποκαλούμε *διακεκριμένες* ή *ηττώμενες* θέσεις) *τέτοιο ώστε*:

(α) *για κάθε θέση που δεν είναι ηττώμενη υπάρχει μια κίνηση μετά από την οποία η θέση είναι ηττώμενη·*

(β) *κάθε ηττώμενη θέση παύει να είναι ηττώμενη μετά από οποιαδήποτε κίνηση ενός παίκτη.*

Αυτές οι ιδιότητες των ηττώμενων θέσεων καθορίζουν μια «νικηφόρα μέθοδο για το παιχνίδι» (η οποία μπορεί να εφαρμοστεί, βέβαια, μόνο όταν η αρχική θέση δεν είναι ηττώμενη): *η κάθε κίνηση ενός παίκτη θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε το παιχνίδι να περιέρχεται σε ηττώμενη θέση.*†

*Ο αριθμός a μπορεί να τελειώνει σε «μηδέν μηδενικά», δηλαδή μπορεί να μην περιέχει κανένα μηδενικό στο τέλος, αλλά το μηδέν είναι άρτιος αριθμός.

†Στις ηττώμενες θέσεις περιλαμβάνουμε και τη θέση $(0, 0, 0)$ (αντίστοιχα, την $(0, 0)$), διότι αν ένας παίκτης μπορεί να φέρει το παιχνίδι σε αυτή τη θέση, τότε έχει ήδη νικήσει.

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε τα δύο θεωρήματα που θα πρέπει να αποδειχθούν.

Θεωρημα I *Οι ηττώμενες θέσεις* (δηλαδή, εκείνες που ικανοποιούν τις συνθήκες (α) και (β) παραπάνω) *στο παιχνίδι Nim είναι ακριβώς εκείνες οι θέσεις* (a, b, c) *για τις οποίες τα αθροίσματα όλων των ψηφίων στις ίδιες θέσεις των δυαδικών αναπαραστάσεων των* a, b, c *είναι άρτια.*

Θεωρημα II *Οι ηττώμενες θέσεις στο παιχνίδι Tsyan-shizi είναι ακριβώς εκείνες οι θέσεις* (a, b) *για τις οποίες ισχύει ότι ο αριθμός* a*, γραμμένος στο αριθμητικό σύστημα Fibonacci, τελειώνει σε άρτιο αριθμό μηδενικών, ενώ ο αριθμός* b *προκύπτει από τον αριθμό* a *με την προσθήκη ενός μηδενικού στο τέλος.*

Σχολιο Από τα Θεωρήματα I και II έπεται ότι τόσο το Nim όσο και το Tsyan-shizi δίνουν κατά μια ορισμένη έννοια πλεονέκτημα στον πρώτο παίκτη: οι θέσεις που είναι ηττώμενες για τον πρώτο παίκτη είναι σχετικά λίγες (δείτε τους πίνακες), δηλαδή τέτοιες θέσεις εμφανίζονται πολύ πιο σπάνια απ’ ό,τι όλες οι άλλες θέσεις (οι οποίες είναι νικηφόρες για τον πρώτο παίκτη).

Οι αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων βρίσκονται στις ασκήσεις που ακολουθούν. Συνιστούμε στον αναγνώστη να ξεκινήσει από τις Ασκήσεις 1-4, διότι οι Ασκήσεις 5-7 είναι πολύ πιο απαιτητικές.

Ασκησεις

1. Να αποδειχθεί ότι αν η θέση (a, b, c) στο Nim δεν είναι ηττώμενη, δηλαδή δεν ικανοποιεί τις συνθήκες στη διατύπωση του Θεωρήματος I, τότε ο επόμενος παίκτης μπορεί στη δική του κίνηση να φέρει το παιχνίδι σε ηττώμενη θέση.

2. Να αποδειχθεί ότι αν η θέση (a, b, c) στο Nim είναι ηττώμενη, τότε μετά από κάθε επόμενη κίνηση παύει να είναι ηττώμενη.

3. Να διατυπωθούν οι κανόνες νικηφόρας στρατηγικής στο παιχνίδι Nim όταν το πλήθος των σωρών είναι οποιοσδήποτε καθορισμένος ακέραιος $n \geq 2$ (οι άλλοι κανόνες του παιχνιδιού παραμένουν οι ίδιοι με πριν). Σε ποια στρατηγική ανάγεται η νικηφόρα στρατηγική στην περίπτωση $n = 2$;

4. Να περιγραφούν οι ηττώμενες θέσεις (a, b, c) στο Nim όταν οι αριθμοί a, b, c δεν είναι γραμμένοι στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα αλλά στο τετραδικό σύστημα (δηλαδή, όταν φερ’ ειπείν το a αναπαριστάται στη μορφή

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n 4^n + a_{n-1} 4^{n-1} + \cdots + a_2 4^2 + a_1 4 + a_0,$$

όπου $0 \leq a_i \leq 3$ για $i = n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$).*

*Η γραμμή πάνω από την παράσταση σημαίνει ότι πρόκειται για μια αναπαράσταση ενός αριθμού μέσω των ψηφίων $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, και όχι για γινόμενο αριθμών.

5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο p υπάρχει μία και μόνο μία ηττώμενη θέση (a, b) στο Tsyan-shizi (δηλαδή μια θέση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος II) τέτοια ώστε $b - a = p$. Να επαληθευτεί αυτό για τις πρώτες 15 ηττώμενες θέσεις στον Πίνακα II.

6. Να αποδειχθεί ότι αν η θέση (a, b) στο Tsyan-shizi δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος II, τότε ο επόμενος παίκτης μπορεί είτε να νικήσει αμέσως στην επόμενη κίνησή του είτε να φέρει το παιχνίδι σε ηττώμενη θέση.

7. Να αποδειχθεί ότι αν η θέση (a, b) στο Tsyan-shizi είναι ηττώμενη, τότε η επόμενη θέση μετά από οποιαδήποτε κίνηση δεν είναι ηττώμενη.

8. Να διατυπωθούν οι κανόνες νικηφόρας στρατηγικής στο παιχνίδι Tsyan-shizi αν το πλήθος των σωρών είναι περιττό (ο κάθε παίκτης μπορεί να πάρει οποιονδήποτε αριθμό σπίρτων από έναν μόνο σωρό ή τον ίδιο (και επίσης οποιονδήποτε!) αριθμό σπίρτων από όλους τους σωρούς).

Προβλημα Να διατυπωθούν οι κανόνες νικηφόρας στρατηγικής στο παιχνίδι Tsyan-shizi αν το πλήθος των σωρών ισούται με τέσσερα.

Θα ήθελα να προειδοποιήσω τον αναγνώστη ότι δεν γνωρίζω τη λύση αυτού του προβλήματος.