

Πρόλογος

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζεται υλικό που χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια ενός έτους σε έναν από τους μαθηματικούς κύκλους που είχαν οργανωθεί από μέλη του Μαθηματικού Τμήματος του Κρατικού Πανεπιστημίου της Μόσχας για μαθητές της Δευτέρας Γυμνασίου. Σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και με διαφορετικές ομάδες μαθητών, η ύλη αυτή έχει χρησιμοποιηθεί επίσης σε έναν μαθηματικό κύκλο ο οποίος λειτουργούσε στο Σχολείο Αριθμός 57 της Μόσχας, ένα σχολείο με ισχυρό προσανατολισμό στα μαθηματικά. Κάποιοι από τους μαθητές είχαν παρακολουθήσει τον κύκλο την προηγούμενη χρονιά, αλλά καθώς οι περισσότεροι ήταν αρχάριοι, εν γένει οι συνεδρίες ήταν προσανατολισμένες σε αρχαρίους. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι συνεδρίες ήταν ιδιαίτερα εύκολες, αφού ακόμα και πολύ απλά προβλήματα μπορούν να αποθαρρύνουν έναν αρχάριο. Αν και η παρακολούθηση προϋπέθετε κάποιες ελάχιστες γνώσεις από το σχολικό πρόγραμμα, ωστόσο αρκετά μεγάλο μέρος της σχολικής ύλης χρειαζόταν επανάληψη. Για τους πιο προχωρημένους μαθητές, υπήρχαν πάντα επιπλέον προβλήματα.

Οι μαθητές και οι γονείς τους μαθαίνουν για τους μαθηματικούς κύκλους από στόμα σε στόμα, από το Διαδίκτυο ή σε μαθηματικές Ολυμπιάδες. Για παράδειγμα, στα τέλη Σεπτεμβρίου διοργανώνεται στη Μόσχα το Τουρνουά Λομονόσοφ, ένας πολυθεματικός διαγωνισμός για μαθητές από την Πρώτη Γυμνασίου μέχρι την Τρίτη Λυκείου. Πρόκειται για ένα σημαντικό γεγονός. Ο διαγωνισμός διεξάγεται κάποια Κυριακή σε διάφορα κολέγια της Μόσχας ταυτόχρονα, και τα τελευταία χρόνια έχει διαδοθεί και σε άλλες πόλεις. Οι κανόνες και τα προβλήματα είναι τα ίδια για όλες τις πόλεις. Οι μαθητές μεταβαίνουν σε κάποια από τις διοργανώτριες πόλεις και διαγωνίζονται στα ίδια θέματα στα μαθηματικά, τα μαθηματικά παιχνίδια, τη φυσική, τη βιολογία, τη γλωσσολογία, την ιστορία, την αστρονομία, τη λογοτεχνία και τη χημεία. Για καθένα από αυτά τα αντικείμενα, ο διαγωνισμός διαρκεί περίπου μία ώρα και μπορεί να αρχίσει ουσιαστικά σε οποιαδήποτε στιγμή στη διάρκεια της Ολυμπιάδας· η όλη διοργάνωση διαρκεί περίπου πέντε ώρες. Αυτό δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα, μετακινούμενοι από τη μία αίθουσα στην άλλη, να συμμετάσχουν σε διάφορους διαγωνισμούς της επιλογής τους. Εκείνοι που έχουν καλές επιδόσεις σε κάποιον δεδομένο διαγωνισμό λαμβάνουν ένα πιστοποιη-

τικό νικητή για αυτό τον διαγωνισμό, ενώ εκείνοι που επιτυγχάνουν σε πολλούς διαγωνισμούς λαμβάνουν ένα καθολικό πιστοποιητικό νικητή.

Ωστόσο, ο πιο σημαντικός στόχος δεν είναι τα πιστοποιητικά· ο πραγματικός στόχος είναι να ενδιαφερθούν οι μαθητές για τις επιστήμες και να παρακινηθούν να συμμετάσχουν στους κύκλους. Οι μαθητές μπορεί να αντιπαθούν κάποιο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο για έναν σωρό λόγους –για παράδειγμα, επειδή έτυχε να έχουν έναν μέτριο δάσκαλο– αλλά όταν διεξάγονται ταυτόχρονα πολλοί διαγωνισμοί, η περιέργειά τους μπορεί να τους παρακινήσει να επισκεφθούν έναν διαγωνισμό, λόγου χάριν, στα μαθηματικά παιχνίδια, ακόμα κι αν είναι αδιάφοροι για τα μαθηματικά. Μετά από το τουρνουά Λομονόσοφ η στάση τους απέναντι σε κάποιο αντικείμενο μπορεί να αλλάξει, καθώς οι μαθητές διαπιστώνουν ότι κάθε αντικείμενο μπορεί να είναι ενδιαφέρον. Σε όλους τους συμμετέχοντες στο Τουρνουά διανέμεται ένα φυλλάδιο που περιγράφει διάφορους μοσχοβίτικους κύκλους.

Οι μαθηματικοί κύκλοι υπάρχουν στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας για πάνω από έναν αιώνα, και στις μέρες μας αποκαλούνται από κοινού «Μικρό Mech-Mat» – μια ονομασία που παραπέμπει στο «υποκοριστικό» της διάσημης σχολής μηχανικών και μαθηματικών του πανεπιστημίου. Υπάρχουν δύο τμήματα: ένα με απογευματινές συνεδρίες και ένα άλλο δι' αλληλογραφίας. Το απογευματινό τμήμα του Μικρού Mech-Mat αποτελείται από κύκλους για μαθητές των τάξεων από την Πρώτη Γυμνασίου μέχρι την Τρίτη Λυκείου, αν και δεν είναι ασυνήθιστο ένας μαθητής της Έκτης Δημοτικού να συμμετέχει σε έναν κύκλο της Πρώτης Γυμνασίου. Υπάρχει επίσης μια ομάδα για πιο μικρούς μαθητές. Σε έναν μαθηματικό κύκλο μπορεί να συμμετέχει οποιοσδήποτε· δεν υπάρχουν εξετάσεις και η παρακολούθηση οποιασδήποτε συνεδρίας είναι δωρεάν.

Οι συνεδρίες γίνονται σε αίθουσες διδασκαλίας του κτιρίου MechMat τα απογεύματα του Σαββάτου, όταν οι περισσότερες αίθουσες είναι ελεύθερες. Σε κάθε αίθουσα, υπάρχουν 15 έως 30 μαθητές και τρεις έως έξι δάσκαλοι. Οι περισσότεροι δάσκαλοι είναι φοιτητές του πανεπιστημίου και συχνά έχουν περάσει και οι ίδιοι από τέτοιους κύκλους, αλλά ο επικεφαλής δάσκαλος είναι συνήθως κάποιος έμπειρος μαθηματικός. Η σύνθεση της ομάδας των μαθητών είναι ρευστή, καθώς νέοι μαθητές εντάσσονται στους κύκλους συνεχώς και κάποιοι μαθητές εγκαταλείπουν. Ωστόσο, υπάρχει πάντα ένας πυρήνας: μια ομάδα μαθητών που παρακολουθούν τακτικά τον κύκλο. Το προσωπικό διδασκαλίας δεν αλλάζει, αν εξαιρέσουμε ότι κάποιοι ίσως να μην μπορούν να συμμετέχουν σε κάθε συνεδρία. Υπάρχει μια χειμερινή παύση, όπου οι μαθητές γράφουν διαγωνίσματα και έχουν διακοπές.

Ο συνολικός αριθμός των συμμετεχόντων για κάθε τάξη από την Πρώτη μέχρι την Τρίτη Γυμνασίου είναι συνήθως από 100 μέχρι 200 κάθε συγκεκρι-

μένο απόγευμα. Στις μεγαλύτερες τάξεις (από την Πρώτη μέχρι την Τρίτη Λυκείου), υπάρχουν λιγότεροι μαθητές, διότι σε αυτή την ηλικία πολλοί φοιτούν ήδη σε ημερήσια «εξειδικευμένα σχολεία» μαθηματικών, στα οποία έχουν μεγάλο φόρτο εργασιών. Για κάθε σχολική βαθμίδα (τάξη) υπάρχει ένας επικεφαλής δάσκαλος που είναι υπεύθυνος για τη συγκρότηση του προγράμματος για αυτή τη συγκεκριμένη βαθμίδα. Όλοι οι δάσκαλοι μιας δεδομένης βαθμίδας είναι δυνατόν να συμμετέχουν στην ανάπτυξη διδακτικού υλικού για αυτή τη βαθμίδα. Αν και οι συνεδρίες γίνονται σε διάφορα αμφιθέατρα, για όλες τις διδακτικές ενότητες της ίδιας βαθμίδας χρησιμοποιείται το ίδιο διδακτικό υλικό. Μια εξαίρεση σε αυτή την πρακτική είναι όταν ένας δάσκαλος επιλέγει να δημιουργήσει το δικό του ατομικό μάθημα. Τέτοια ατομικά μαθήματα είναι πιο συνηθισμένα στις υψηλότερες βαθμίδες, αλλά ο αριθμός των συμμετεχόντων σε καθένα από αυτά μπορεί να είναι αρκετά μικρός.

Το πρώτο μάθημα της χρονιάς είναι συνήθως σε γραπτή μορφή, διότι οι διοργανωτές δεν μπορούν να προβλέψουν πόσοι μαθητές θα εμφανιστούν, και επομένως δεν γνωρίζουν πόσοι δάσκαλοι θα χρειαστούν. Τα προβλήματα που επιλέγονται για την πρώτη συνεδρία δεν είναι πολύ δύσκολα, και δεν απαιτούν πολύ γράψιμο. Οι διοργανωτές ενημερώνουν τους μαθητές ότι δεν πρόκειται για εξέταση: ο βασικός στόχος της συνάντησης είναι να διαπιστωθεί τι γνωρίζουν αυτοί οι μαθητές, τι δεν γνωρίζουν, και τι θα πρέπει να μάθουν. Τους λέμε: όσο λιγότερα ξέρετε, τόσο το καλύτερο, διότι έτσι υπάρχουν περισσότερα που μπορούμε να σας διδάξουμε. Όταν το ακούν αυτό, αντιδρούν με πλατιά χαμόγελα. Λέμε επίσης στους μαθητές ότι μπορούν να λύσουν τα προβλήματα με οποιαδήποτε σειρά, και ότι δεν θα πρέπει να φοβούνται ότι θα λύσουν μόνο λίγα, και ακόμα κι αν δεν μπορέσουν να λύσουν κανένα δεν πειράζει. Αν, από την άλλη πλευρά, κάποιος μαθητής λύσει όλα τα προβλήματα γρήγορα, ίσως να τους δοθούν πιο απαιτητικά επιπλέον προβλήματα. Στην πρώτη συνάντηση, οι μαθητές συμπληρώνουν επίσης ένα σύντομο ερωτηματολόγιο. Στην επόμενη συνεδρία, κάθε μαθητής βρίσκει στη λίστα των συμμετεχόντων στον κύκλο το όνομά του μαζί με τον αριθμό μιας αίθουσας. Οι μαθητές μπορούν αν θέλουν να αλλάξουν αίθουσα. Σε κάθε επόμενη συνεδρία, υπάρχει μια ξεχωριστή αίθουσα για τους νεοφερμένους εκείνης της μέρας· αργότερα οι μαθητές αυτοί μετακινούνται σε άλλες αίθουσες. Με αυτό τον τρόπο, σε κάθε κανονική αίθουσα προστίθενται περιοδικά κάποιοι νεοφερμένοι. Τα γνωστικά αντικείμενα των συνεδριών αλλάζουν αρκετά συχνά, οπότε ακόμα και οι μαθητές που εντάσσονται στον κύκλο στη μέση της χρονιάς θα δουν σύνολα προβλημάτων με τα οποία έχουν αρκετές πιθανότητες επιτυχίας.

Οι μαθηματικές ικανότητες και γνώσεις των μαθητών ποικίλουν σημαντικά. Υπάρχουν αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία. Μπορούμε να ορίσουμε ξεχωριστές αίθουσες για αρχάριους και για

προχωρημένους μαθητές, όπου το διδακτικό υλικό για την κάθε τάξη θα είναι αντίστοιχα διαφορετικού επιπέδου. Η προσέγγιση αυτή απαιτεί διπλάσια δουλειά, και πολύ συχνά απλώς δεν υπάρχουν οι απαιτούμενοι πόροι για να εφαρμοστεί. Μια άλλη δυνατότητα είναι να ετοιμάσουμε μία μόνο εκδοχή του υλικού για όλους τους μαθητές, χωρίς να το ταξινομήσουμε σε διαφορετικά επίπεδα. Στην περίπτωση αυτή, το κάθε σύνολο προβλημάτων θα πρέπει να περιλαμβάνει πολύ απλά προβλήματα, πιο απαιτητικά, και επίσης επιπλέον προβλήματα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να προχωρούν με τον δικό τους ρυθμό, και μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα αν υπάρχουν αρκετοί δάσκαλοι στην αίθουσα. Οι συζητήσεις στον πίνακα μπορούν επίσης να γίνονται με τρόπο που να είναι επωφελής για τους φοιτητές διαφορετικών επιπέδων.

Μια άλλη θαυμάσια προσέγγιση είναι να βάλουμε όλους τους νέους μαθητές σε ένα μεγάλο αμφιθέατρο. Εκεί οι μαθητές παίζουν διασκεδαστικά παιχνίδια και λύνουν εύκολα προβλήματα τα οποία αναλύονται προσεκτικά. Εκείνοι οι μαθητές που μπορούν να αντιμετωπίσουν τα εύκολα προβλήματα εντάσσονται σε έναν κανονικό μαθηματικό κύκλο, ενώ εκείνοι που δυσκολεύονται παραμένουν στο αμφιθέατρο για τους νεοφερμένους. Για να λειτουργήσει σωστά, η προσέγγιση αυτή απαιτεί πολύ καλούς δασκάλους για τους νεοφερμένους.

Οι τελευταίες συνεδρίες πριν από τις χειμερινές και τις θερινές διακοπές είναι πολύ ιδιαίτερες. Μπορεί να περιλαμβάνουν μια συνεδρία με προβλήματα τοπολογίας, όπου οι μαθητές δένονται με σχοινιά και θα πρέπει να απελευθερωθούν χωρίς να κόψουν ούτε να λύσουν τα σχοινιά. Μια άλλη δυνατότητα είναι ένας διαγωνισμός τον οποίο ονομάζουμε Μαθηματικό Λαβύρινθο: περιγράφεται αναλυτικά από τη σελίδα 223 και μετά, αλλά η γενική ιδέα είναι η εξής.

Σε κάθε μαθητή δίνουμε έναν χάρτη του «λαβυρίνθου» και τους κανόνες του παιχνιδιού. Ο χάρτης περιλαμβάνει τους αριθμούς και τις ονομασίες των αιθουσών, όπως Νοεροί Υπολογισμοί, Παιχνίδια, Γεωμετρία, Λογική, Συνδυαστική, ή Παζλ. Κάθε μαθητής θα πρέπει να επισκεφτεί όλες τις αίθουσες με οποιαδήποτε σειρά και να λύσει ένα πρόβλημα σε κάθε αίθουσα. Οι αίθουσες είναι διάσπαρτες σε όλο το κτίριο, οπότε ένα μέρος της διασκέδασης είναι ότι σε κάποιους μαθητές αρέσει να τρέχουν από τη μία αίθουσα στην άλλη. Αφού κάποιος μαθητής επισκεφτεί όλες τις αίθουσες του χάρτη του, πηγαίνει στο τελικό αμφιθέατρο όπου μπορεί να επιλέξει ένα βιβλίο ως βραβείο.

Οι χειμερινές διακοπές έχουν αρκετά μεγάλη διάρκεια· μερικές φορές μπορούμε να τις συντομεύσουμε βρίσκοντας ενθουσιώδεις δασκάλους πρόθυμους να εργαστούν με μαθητές ακόμα και στη διάρκεια των δικών τους τελικών εξετάσεων ή διακοπών. Αλλά σε κάθε περίπτωση, πριν από τις διακοπές δίνεται στους μαθητές μια σελίδα με τα προβλήματα του Χειμερινού Διαγωνισμού,

ώστε να μην ξεχάσουν τον μαθηματικό κύκλο. Οι μαθητές θα πρέπει να εργαστούν σε αυτά τα προβλήματα στη διάρκεια των διακοπών, να γράψουν τις λύσεις τους και να τις φέρουν για βαθμολόγηση σε κάποια από τις πρώτες συνεδρίες μετά τις διακοπές. Οι μαθητές παίρνουν κάποια βραβεία (συνήθως βιβλία μαθηματικών). Όλοι όσοι φέρουν λυμένες τις ασκήσεις παίρνουν βραβείο, αλλά φυσικά όσο καλύτερη είναι η επίδοση ενός μαθητή τόσο μεγαλύτερο είναι το βραβείο.

Οι συνεδρίες στον μαθηματικό κύκλο τα απογεύματα της Τετάρτης στο Σχολείο Αριθμός 57 της Μόσχας, ένα ημερήσιο σχολείο με προσανατολισμό προς τα μαθηματικά, είναι παρόμοιες με αυτές που μόλις περιγράψαμε. Συμμετέχουν περίπου 100 μαθητές από κάθε τάξη· κάθε αίθουσα έχει 15 μαθητές και τρεις έως τέσσερις δασκάλους, μεταξύ των οποίων κάποιοι παλιοί μαθητές του σχολείου που είναι πρόθυμοι να βοηθήσουν. Ο κύκλος είναι για την Δευτέρα και την Τρίτη Γυμνασίου, αν και πρόσφατα ξεκίνησε ένας νέος κύκλος για την Πρώτη Γυμνασίου. Οι χειμερινές διακοπές τους έχουν μικρότερη διάρκεια, καθώς συμπίπτουν με τις σχολικές διακοπές, αλλά την άνοιξη κάποιες από τις συνεδρίες του κύκλου αντικαθιστώνται από συνεντεύξεις που γίνονται με σκοπό να επιλεγούν μαθητές για ειδικά μαθήματα μαθηματικών στην Τρίτη Γυμνασίου και στην Πρώτη Λυκείου. Οι συνεντεύξεις αυτές δεν περιορίζονται σε όσους συμμετέχουν στους μαθηματικούς κύκλους: οποιοσδήποτε ενδιαφερόμενος μαθητής μπορεί να περάσει από συνέντευξη.

Πώς διευθύνουμε έναν μαθηματικό κύκλο;

Κατ' αρχάς, όλοι οι μαθητές παίρνουν σε έντυπη μορφή τα βασικά προβλήματα. Οι μαθητές διαβάζουν τα προβλήματα και προσπαθούν να τα λύσουν. Μπορούν να τα λύσουν με οποιαδήποτε σειρά. Ένας δάσκαλος μπορεί να υποδείξει με ήπιο τρόπο ότι θα ήταν ίσως καλή ιδέα να διατρέξουν τη λίστα χωρίς να αφιερώσουν υπερβολικά πολύ χρόνο σε κανένα συγκεκριμένο πρόβλημα: αν ένα πρόβλημα απαιτεί πάρα πολύ χρόνο, ίσως θα ήταν καλύτερα να το αφήσει κανείς στην ησυχία του για λίγο και να επανέλθει σε αυτό αργότερα.

Ένας μαθητής που έχει κάποια ερώτηση ή που θέλει να συζητήσει τη λύση του απλά σηκώνει το χέρι του, και ένας δάσκαλος πηγαίνει για να συζητήσει μαζί του. Οι μαθητές μπορούν να εξηγούν τις λύσεις τους προφορικά, αλλά είναι χρήσιμο να έχουν τουλάχιστον κάποιες γραπτές σημειώσεις με όλα τα απαραίτητα σχήματα και τους σχετικούς υπολογισμούς. Μια συζήτηση με κάποιον δάσκαλο δεν είναι σε καμία περίπτωση κάποιου είδους τεστ. Μερικές φορές ένας μαθητής έχει βρει μια λύση αλλά λόγω απειρίας δεν μπορεί να τη διατυπώσει σωστά, ή ίσως έχει παρανοήσει εντελώς το πρόβλημα, ή δεν γνωρί-

ζει κάποια σημαντικά στοιχεία, κ.λπ. Το έργο του δασκάλου είναι να βοηθήσει τον μαθητή.

Στη μέση της συνεδρίας γίνεται ένα μικρό διάλειμμα για όποιον το χρειάζεται. Κοντά στο διάλειμμα –είτε μόλις πριν είτε αμέσως μετά– συζητούνται με ολόκληρη την τάξη λύσεις για τα προβλήματα των προηγούμενων συνεδριών. Ο λόγος που γίνεται αυτό στη μέση της συνεδρίας και όχι την αρχή της είναι για να δοθεί στα παιδιά η δυνατότητα να παραδώσουν τα προβλήματα που δεν τα τελείωσαν στην προηγούμενη συνάντηση αλλά τα ολοκλήρωσαν στο σπίτι. Κατά τη συζήτηση των παλαιότερων προβλημάτων, ίσως να ενδείκνυνται κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το τρέχον σύνολο προβλημάτων· σε κάποιες περιπτώσεις οι παρατηρήσεις αυτές θα μπορούσαν ίσως να γίνουν ακόμα ωρύτερα αν το θέμα φαίνεται δύσκολο στους μαθητές. Όλα εξαρτώνται από τον επικεφαλής δάσκαλο, ο οποίος θα μπορούσε να επιλέξει να κάνει κάποια υπόδειξη ανά πάσα στιγμή, ή να δώσει ένα αστείο πρόβλημα για να χαλαρώσει η τάξη, ή να ζητήσει από κάποιον να έρθει στον πίνακα και να παρουσιάσει τη λύση του, ή να παίξει ένα παιχνίδι.

Οι εξηγήσεις του δασκάλου στον πίνακα διαρκούν μόνο περίπου 20 λεπτά σε μια δίωρη συνεδρία. Τον υπόλοιπο χρόνο οι μαθητές τον αφιερώνουν στο να λύνουν τα προβλήματα και να τα συζητούν μεμονωμένα με τους δασκάλους.

Στους μαθητές που τελειώνουν με τα βασικά προβλήματα δίνονται επιπλέον προβλήματα. Μερικές φορές, σε έναν μαθητή που, ενώ του έχει απομείνει πολύς χρόνος, έχει λύσει όλα τα βασικά προβλήματα εκτός από ένα και δεν μπορεί να προχωρήσει με αυτό το ένα που του έχει απομείνει, μπορεί να δοθούν επίσης επιπλέον προβλήματα, για να μπορέσει να πάει παρακάτω. Στο τέλος της συνεδρίας, η λίστα των επιπλέον προβλημάτων δίνεται σε οποιονδήποτε τη ζητήσει.

Υπάρχουν πάντα κάποιοι μαθητές που λύνουν πολύ λίγα προβλήματα, ή και κανένα πρόβλημα, όσο εύκολη κι αν είναι η συνεδρία. Είναι σημαντικό στη διάρκεια κάθε συνεδρίας κάποιος δάσκαλος να πηγαίνει σε κάθε μαθητή για να του κάνει κάποια υπόδειξη ή απλά για να συζητήσει για τα προβλήματα. Ένας μαθητής που δεν έχει τελειώσει όλα τα προβλήματα στο τέλος της συνεδρίας μπορεί να τα λύσει στο σπίτι και να συζητήσει τις λύσεις στην επόμενη συνεδρία· ωστόσο, δεν υπάρχει υποχρεωτική εργασία για το σπίτι. Περιστασιακά, κάποια δύσκολα επιπλέον προβλήματα συζητούνται αρκετές εβδομάδες από τότε που δόθηκαν, για να έχουν όλοι αρκετό χρόνο να δουλέψουν σε αυτά.

Η πρόοδος του κάθε μαθητή καταγράφεται σε ένα ειδικό ημερολόγιο, όπου τα ολοκληρωμένα προβλήματα σημειώνονται με πρόσημο συν. Στα παιδιά αυτής της ηλικίας αρέσει να ανταγωνίζονται: χαίρονται πολύ όταν έχουν πολλά συν, και απογοητεύονται όταν έχουν λίγα. Προσπαθούμε η προσοχή των παιδιών να μην είναι εστιασμένη στα πρόσημα, διότι ο στόχος δεν είναι αυτός.

Τα ημερολόγια αυτά είναι αναγκαία για τους δασκάλους ώστε να αξιολογήσουν την επιτυχία μιας συνεδρίας. Είναι καλύτερο να καταγράφονται τα αποτελέσματα στη διάρκεια της συνεδρίας, γιατί με αυτό τον τρόπο υπάρχει μια έγκαιρη ένδειξη για το ποια προβλήματα είναι πιο δύσκολα, και για ποια χρειάζεται να γίνει μια υπόδειξη, ή να παρακινηθούν στα παιδιά να στραφούν προς μια ορισμένη κατεύθυνση.

Η δομή των συνόλων προβλημάτων: πώς επιλέγονται τα προβλήματα

Η συνηθισμένη πρακτική στα κανονικά σχολεία είναι να δημιουργείται ένα μάθημα γύρω από κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο. Για παράδειγμα, αν το σημερινό αντικείμενο είναι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις, παρουσιάζουμε κάποια θεωρία, δίνουμε μερικά παραδείγματα, και λύνουμε κάποια προβλήματα στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές μαθαίνουν γρήγορα το νέο αντικείμενο και μπορούν να κάνουν τυπικές ασκήσεις. Η μέθοδος αυτή σίγουρα επιτυγχάνει αποτελέσματα. Ωστόσο, πιστεύω ότι δεν λειτουργεί καλά για μαθηματικούς κύκλους, ειδικά για τους μικρότερους μαθητές.

Ένας λόγος είναι ότι η επίλυση προβλημάτων στο ίδιο αντικείμενο για ολόκληρη τη συνεδρία ίσως να είναι δύσκολη και βαρετή για έναν μαθητή μικρότερης ηλικίας. Επιπλέον, αν ο δάσκαλος δεν ξεκινήσει μια συνεδρία εξηγώντας πώς μπορούν να λυθούν τα προβλήματα στο νέο αντικείμενο, ένας μαθητής που δεν θα καταφέρει να συλλάβει τη βασική ιδέα μόνος του μπορεί τελικά να παρακολουθήσει ολόκληρη τη συνεδρία χωρίς να καταφέρει να λύσει τίποτα. Από την άλλη πλευρά, αν ο δάσκαλος εξηγήσει πώς λύνονται τα προβλήματα κάποιου συγκεκριμένου τύπου, θα αφήσει μικρότερο περιθώριο για δημιουργικότητα, αφού θα αρκεί απλά να θυμάται κανείς τι είπε ο δάσκαλος και να το εφαρμόσει σε παρόμοια προβλήματα.

Προσωπικά έχω επιλέξει μια κάπως διαφορετική προσέγγιση. Η πρόοδος είναι πιο αργή αλλά, κατά τη γνώμη μου, πιο αξιόπιστη και ενδιαφέρουσα, και η μέθοδος έχει κάποια επιπλέον πλεονεκτήματα. Ένα τυπικό σύνολο προβλημάτων έχει την εξής μορφή:

Το πρώτο πρόβλημα είναι πολύ εύκολο. Μερικές φορές μπορεί να λυθεί με διαφορετικούς τρόπους. Μια λύση πιθανόν να μην απαιτεί ευρηματική σκέψη, αλλά μόνο κάποια δουλειά, ενώ μια άλλη ίσως να περιλαμβάνει μια ενδιαφέρουσα ιδέα που θα έδινε στον μαθητή τη δυνατότητα να λύσει το πρόβλημα εύκολα, γρήγορα και κομψά. Για παράδειγμα, ας δούμε το εξής ερώτημα: Τι είναι μεγαλύτερο, το άθροισμα των πρώτων 50 περιττών φυσικών αριθμών ή το άθροισμα των πρώτων 50 άρτιων φυσικών αριθμών, και κατά πόσο; Κάποιοι

μαθητές θα υπολογίσουν και τα δύο αθροίσματα και θα τα συγκρίνουν, αλλά η απάντηση μπορεί στην πραγματικότητα να γίνει προφανής χωρίς αυτούς τους χρονοβόρους υπολογισμούς. Είναι πολύ χρήσιμο να θέτει κανείς προβλήματα που έχουν μια διαισθητικά προφανή αλλά λάθος απάντηση. Για παράδειγμα: είναι δυνατόν το γινόμενο ab να διαιρείται με το c^2 αν κανένας από τους a και b δεν διαιρείται με το c ; Η «προφανής» απάντηση είναι, βέβαια, όχι. Αλλά στην πραγματικότητα, το γινόμενο ab μπορεί να διαιρείται με το c^2 , ή ακόμα και με το c^{100} . Το πρόβλημα αυτό κάνει εντύπωση!

Στην πραγματικότητα, κάθε σύνολο προβλημάτων αφορά κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο, και σχεδόν τα μισά από τα προβλήματα είναι αφιερωμένα σε αυτό. Επιπλέον, θα πρέπει στην προηγούμενη συνεδρία να δίνεται ένα μέτριο έως εύκολο προκαταρκτικό πρόβλημα πάνω σε αυτό το αντικείμενο, ώστε οι μαθητές να μπορούν να σκεφτούν εκ των προτέρων σχετικά με αυτό τον νέο τύπο προβλημάτων. Στη μέση της τρέχουσας συνεδρίας, όπου θα παρουσιαστούν οι λύσεις του προηγούμενου συνόλου προβλημάτων, το πρόβλημα αυτό θα συζητηθεί. Επομένως, εκείνοι οι μαθητές που δεν έχουν ακόμα αντιληφθεί πώς να λύνουν προβλήματα πάνω στο νέο αντικείμενο θα έχουν μια υπόδειξη. Το σύνολο προβλημάτων περιέχει επίσης κάποια επαναλαμβανόμενα προβλήματα. Μου αρέσει να θέτω τα ίδια ερωτήματα μεταμφιεσμένα με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα, ας δούμε πέντε ερωτήματα που αφορούν την ίδια βασική ιδέα:

1. Στο κυλικείο ενός σχολείου υπάρχουν κάποιες βρύσες. Καθεμία από αυτές μπορεί να είναι ανοιχτή ή κλειστή. Με πόσους τρόπους μπορεί να τρέχει το νερό στο κυλικείο;

2. Πόσες ακολουθίες από 0 και 1 μπορεί κανείς να φτιάξει, έτσι ώστε η κάθε ακολουθία να αποτελείται από 10 ψηφία;

3. Σε ένα δέντρο υπάρχουν 10 μήλα. Με πόσους τρόπους μπορεί κανείς να κόψει κάποια από αυτά;

4. Μετά από το σχολείο, 12 μαθητές αποφάσισαν να χωριστούν σε 2 ομάδες, που η μία θα πάει βόλτα στην πόλη και η άλλη θα παρακολουθήσει ένα μάθημα επιστήμης υπολογιστών. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν οι μαθητές σε δύο ομάδες;

5. Ο κατάλογος του κυλικείου του σχολείου είναι πάντα ο ίδιος και περιλαμβάνει n διαφορετικά σνακ. Ο Πήτερ θέλει να τρώει ένα διαφορετικό πρωινό κάθε μέρα· μπορεί να φάει από 0 μέχρι n διαφορετικά σνακ κάθε φορά. Για πόσες μέρες μπορεί να το κάνει αυτό;

Οι μαθητές συχνά λύνουν αυτά τα προβλήματα σαν να είναι εντελώς άγνωστα. Αλλά χαίρομαι πολύ όταν ένας μαθητής λέει «Μισό λεπτό! Έχουμε ήδη λύσει αυτό το πρόβλημα!». Αυτό σημαίνει ότι έχει μάθει να διακρίνει την ουσία του προβλήματος και δεν παρασύρεται από την εμφάνιση. Η επανάληψη

προβλημάτων που είναι ουσιαστικά πανομοιότυπα αλλά παρουσιάζονται με διαφορετικές μορφές σε ένα σύνολο προβλημάτων είναι επίσης χρήσιμη για εκείνους που έχουν απουσιάσει σε μερικές συνεδρίες.

Όπως αναφέραμε ήδη, το κάθε σύνολο προβλημάτων περιλαμβάνει ένα εύκολο ή μέτριας δυσκολίας πρόβλημα, που εισάγει το αντικείμενο του επόμενου συνόλου προβλημάτων. Μπορεί κανείς να δώσει ένα πρόβλημα πάνω στο ίδιο νέο αντικείμενο σε αρκετές μετέπειτα συνεδρίες. Με τον τρόπο αυτό, ίσως οι ίδιοι οι μαθητές να αναπτύξουν σταδιακά μια μέθοδο επίλυσης αυτών των προβλημάτων. Αργότερα θα είναι πιο εύκολο και πιο φυσικό για αυτούς να αποδεχθούν αυτή τη μέθοδο από τον δάσκαλο όταν το αντικείμενο θα συζητηθεί αναλυτικά.

Μερικές φορές, δίνεται στους μαθητές μια ολόκληρη σειρά προβλημάτων, ένα σε κάθε συνεδρία, όπου το κάθε πρόβλημα βοηθά να επιλυθεί ένα μεταγενέστερο. Ένα καλό παράδειγμα είναι μια ακολουθία προβλημάτων για το πώς να διασχίσει κανείς ένα ποτάμι ή για το πώς να προλάβει ένα λεωφορείο.

Μερικές φορές είναι δυνατόν να δοθεί ένα δύσκολο, αλλά πολύ ενδιαφέρον, πρόβλημα πάνω σε ένα νέο αντικείμενο για να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών, αλλά θα πρέπει να φροντίσουμε να τους δώσουμε αρκετό χρόνο να σκεφτούν. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές σε κάθε νέα συνεδρία θα λένε «Α, ας συζητήσουμε εκείνο το πρόβλημα – πώς μπορεί να λυθεί;» Μπορούμε να συζητήσουμε το πρόβλημα στον πίνακα μαζί με τους μαθητές, χρησιμοποιώντας «καταιγισμό ιδεών» για να φτάσουμε σε κάποιο ενδιάμεσο αποτέλεσμα, και να συζητήσουμε την πλήρη λύση αρκετές συνεδρίες αργότερα.

Στους μαθητές που έχουν εμπεδώσει σχεδόν όλα τα βασικά αντικείμενα δίνονται επιπλέον προβλήματα που βασίζονται είτε σε ένα νέο είτε σε ένα παλιό αντικείμενο. Τα προβλήματα αυτά είναι σχεδιασμένα για τους ικανούς μαθητές και πιθανόν να είναι δύσκολα ή απλώς ενδιαφέροντα. Η επίλυσή τους συχνά απαιτεί επινοητικότητα και επιμονή.

Για τους μικρότερους μαθητές, είναι καλό πολλές συνεδρίες να περιλαμβάνουν ανάμεσα στα βασικά προβλήματα κάποιο μαθηματικό παιχνίδι. Τα παιδιά μπορούν να παίξουν αυτό το παιχνίδι μόνα τους, το ένα με το άλλο, ή με κάποιον δάσκαλο. Μπορεί κανείς να διδάξει στα παιδιά πολλές ιδέες με τη βοήθεια προβλημάτων με παιχνίδια. Και τι θα πρέπει να κάνουμε αν ένας μαθητής προσπαθεί επίμονα να παρουσιάσει μια λύση σε ένα πρόβλημα παιχνιδιού η οποία βασίζεται σε λάθος στρατηγική; Φυσικά, ο δάσκαλος θα πρέπει να παίξει μαζί του αυτό το παιχνίδι, αλλά κάνοντας τι; Νικώντας τον; Αυτό δεν είναι πολύ καλό. Πιθανόν με αυτό τον τρόπο να αποκαλύψει την ιδέα για τη λύση ή να αποθαρρύνει τον μαθητή. Υπάρχει μια υπέροχη τεχνική που την έμαθα από τον Nikolai Konstantinov. Ο δάσκαλος θα πρέπει να υιοθετήσει τη στρατηγική του μαθητή και να χάσει. Αν ο μαθητής κάνει άστοχες κινήσεις, ο δάσκαλος

μπορεί να υποδείξει τις σωστές και να διορθώσει τις λάθος, αλλά ακολουθώντας ταυτόχρονα τη στρατηγική του μαθητή συνεχώς. Με τον τρόπο αυτό, ο μαθητής θα νικήσει, που είναι σημαντικό, και ταυτόχρονα θα δει ότι η στρατηγική του είναι λάθος.

Κάθε συνεδρία περιλαμβάνει ένα πρόβλημα γεωμετρίας. Τα προβλήματα αυτά μπορεί να είναι απλές σπαζοκεφαλίες, προβλήματα με κοπή σχημάτων, ή κλασική γεωμετρία η οποία απαιτεί ελάχιστες γνώσεις.

Τα παιδιά δεν θα βαρεθούν με αυτές τις συνεδρίες. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει προηγουμένως για να λύσουν προβλήματα πάνω στα προηγούμενα αντικείμενα, ή μπορούν να προσπαθήσουν να λύσουν προβλήματα στο νέο αντικείμενο, ή ίσως να προσπαθήσουν να λύσουν προβλήματα που απαιτούν μόνο ευρηματικότητα.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι οι μαθητές θα μάθουν πώς να επιλέγουν μέθοδο ανάλογα με το πρόβλημα. Αυτό είναι αναγκαίο, όπως μπορούμε να καταλάβουμε για παράδειγμα από την περίπτωση ενός μαθητή μου που έγραφε ένα διαγώνισμα πάνω σε τρία αντικείμενα: επαγωγή, συνδυαστική και ακεραίους. Ο μαθητής ξεκίνησε να λύνει ένα πρόβλημα, και αφού δούλεψε σε αυτό χωρίς επιτυχία για κάποιο διάστημα, τελικά είπε: «Δεν μπορώ να λύσω αυτό το πρόβλημα, γιατί δεν μπορώ να καταλάβω ποιο αντικείμενο αφορά. Πείτε μου ποιο είναι το αντικείμενο για να μπορέσω να το λύσω.» Αυτό ήταν κάπως απογοητευτικό. Να προσθέσω εδώ ότι ο μαθητής ήταν στην πραγματικότητα αρκετά ικανός και τώρα σπουδάζει με επιτυχία μαθηματικά στο πανεπιστήμιο.

Συχνά οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ότι είναι απαραίτητο να σκεφτούν πάνω στο πρόβλημα για να μπορέσουν να το λύσουν. Στο σχολείο, πολλοί μαθητές αναπτύσσουν τη συνήθεια να ακολουθούν κάποια ρουτίνα, συχνά χωρίς να καταλαβαίνουν το νόημά της. Ένας φίλος μου, ο καθηγητής πανεπιστημίου Gregory Rytbnikov, μου έχει πει ότι κάποτε έθεσε σε μια εξέταση διακριτών μαθηματικών σε έναν αρκετά καλό φοιτητή το εξής μη τυπικό πρόβλημα: «Να αποδειχθεί ότι αν $N > 1$, σε κάθε παρέα N ανθρώπων θα υπάρχουν πάντα δύο που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων σε αυτή την παρέα». Για πολλή ώρα, ο φοιτητής δεν μπορούσε να καταλάβει πώς θα έπρεπε να προσεγγίσει αυτό το πρόβλημα, και κατόπιν ο δάσκαλος του έδωσε μια υπόδειξη. «Ας σκεφτούμε με βάση την απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι όλα τα μέλη της παρέας έχουν διαφορετικό αριθμό φίλων. Παρατήρησε ότι κάθε μέλος της παρέας έχει το πολύ $N - 1$ φίλους.» «Κατάλαβα», είπε ο φοιτητής, «ο συνολικός αριθμός των ανθρώπων είναι N , και ο καθένας μπορεί να έχει από 0 μέχρι $N - 1$ φίλους, οπότε υπάρχει ο ίδιος αριθμός δυνατοτήτων N . Αυτό σημαίνει ότι κάποιος έχει 0 φίλους, κάποιος έχει έναν, κάποιος έχει δύο, και ούτω καθεξής μέχρι τον αριθμό $N - 1$. Α, αυτό είναι μια αριθμητική πρόοδος! Μπορώ να βρω το

άθροισμά της.» Το άθροισμα μιας αριθμητικής προόδου δεν έχει απολύτως καμία σχέση με αυτό το πρόβλημα, αλλά ο φοιτητής, που είχε ήδη σχεδόν λύσει το πρόβλημα, μπερδεύτηκε. Είχε συνηθίσει να ακολουθεί κάποια ρουτίνα – αν υπάρχει μια αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει μάλλον να βρούμε το άθροισμά της.

Σε έναν μαθηματικό κύκλο, οι μαθητές διαπιστώνουν με έκπληξη ότι τα προβλήματα μπορούν να λυθούν με σκέψη. Μερικές φορές κάποιος εκπλήσσεται τόσο πολύ που το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με ένα απλό σκεπτικό χωρίς τύπους που ρωτάει «Μπορούμε να το ισχυριστούμε αυτό; Είναι σωστό; Είναι αυστηρό;». Αυτό ισχύει, για παράδειγμα, για το Πρόβλημα 2.1 στη σελ. 5, σχετικά με τα σχήματα που αποτελούνται από τετράγωνα.

Ο στόχος του μαθηματικού κύκλου δεν είναι διερευνήσουμε τα προβλήματα ενός συγκεκριμένου τύπου ή να εμπεδώσουμε πολλή ύλη σε πραγματολογικό επίπεδο, αλλά να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, να τους δείξουμε ότι τα μαθηματικά είναι μια όμορφη και ενδιαφέρουσα επιστήμη, να τους μάθουμε να σκέπτονται και να διακρίνουν μια λύση από μια μη λύση.

Κάποιοι από τους μαθητές δεν μπορούν να παρακολουθούν τον κύκλο ανελλιπώς, και το να χάσουν μερικές συνεδρίες δεν θα υπονομεύσει την ικανότητά τους να πραγματευτούν ένα νέο σύνολο προβλημάτων. Αν και η τακτική εξάσκηση είναι ένα σημαντικό προαπαιτούμενο για τη μελέτη των μαθηματικών, το πιο σημαντικό είναι μάλλον το ενδιαφέρον. Ξέρω πώς να διδάξω μαθητές που ενδιαφέρονται – μπορώ να τους κεντρίσω το ενδιαφέρον ακόμα περισσότερο – αλλά δεν μπορώ να κάνω σχεδόν τίποτα με τους αδιάφορους. Υπάρχουν πολλά όμορφα προβλήματα, κι αν οι μαθητές μπορούν να τα καταλάβουν αυτό, θα πετύχουν. Για να μάθει κανείς να λύνει προβλήματα, θα πρέπει απλά να δουλεύει συνεχώς πάνω σε αυτά. Ο Yuri Lyson, ένας φοιτητής του Nikolai Konstantinov, πιστεύει ότι το νόημα ενός μαθηματικού κύκλου είναι να δείξει στους μαθητές ότι είναι ικανοί λύτες προβλημάτων.

Δυσκολίες και παγίδες

Υπάρχουν διάφορες δυσκολίες που μπορούν να προκύψουν. Ένας άπειρος δάσκαλος μερικές φορές δεν μπορεί να επιβάλει την πειθαρχία, και οι μαθητές μιλούν πολύ και αποσπών ο ένας την προσοχή του άλλου. Ή ένας μαθητής μπορεί να έχει αναγκαστεί από τους γονείς του να συμμετάσχει στον κύκλο, ενώ εκείνο που θέλει είναι να τρέξει έξω και να παίξει ποδόσφαιρο.

Μερικές φορές οι βοηθοί των μαθητών δεν μπορούν να λύσουν προβλήματα για τους μαθητές της Πρώτης Γυμνασίου. Είναι πολύ σημαντικό τα προβλή-

ματα να συζητούνται με τους δασκάλους εκ των προτέρων και οι δάσκαλοι να λύνουν οι ίδιοι όλα τα προβλήματα, ή τουλάχιστον να μαθαίνουν τις λύσεις για εκείνα που δεν μπόρεσαν να λύσουν. Οι επικεφαλής δάσκαλοι θα πρέπει να μπορούν να λύνουν όλα τα προβλήματα και να έχουν πολύ καλό γνωστικό υπόβαθρο και μεγάλη εμπειρία.

Στους μαθητές αρέσει να κάνουν ερωτήσεις, και με τον τρόπο αυτό μπορεί να προκύψουν ερωτήσεις που είναι πολύ εύλογες και δύσκολες ακόμα κι αν μπορούν να διατυπωθούν εύκολα. Ο δάσκαλος θα πρέπει επίσης να μη φοβάται να πει «δεν ξέρω» και να βρει την απάντηση μέχρι την επόμενη συνεδρία. Μπορεί να τύχει η απάντηση να είναι πολύ περίπλοκη ή ακόμα και άγνωστη. Για παράδειγμα, είναι άγνωστο αν υπάρχει πάντα πρώτος αριθμός στο διάστημα από το n^2 μέχρι το $(n + 1)^2$, και ακόμα και το γνωστό γεγονός ότι υπάρχει πάντα πρώτος αριθμός στο διάστημα από το n μέχρι το $2n$ είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί.

Μερικές φορές οι μαθητές έρχονται στον μαθηματικό κύκλο μετά από μια Ολυμπιάδα λέγοντας «Πείτε μας πώς να λύσουμε αυτά τα προβλήματα». Αν συμβεί αυτό, είναι καλύτερο να προσαρμόσει κανείς το πλάνο της συνεδρίας εντάσσοντας κάποια από τα προβλήματα της Ολυμπιάδας.

Συχνά οι μαθητές μεταδίδουν ο ένας στον άλλο τον ενθουσιασμό τους, πράγμα θαυμάσιο, αλλά κάποιες άλλες φορές δεν υπάρχει αρκετή ενέργεια και η συνεδρία είναι μάλλον νωθρή. Μπορεί να τύχει ένα σύνολο προβλημάτων που φαίνεται βατό και ενδιαφέρον, τουλάχιστον για κάποιους μαθητές, να είναι δύσκολο ή βαρετό για άλλους. Όταν οι μαθητές βρίσκουν ένα σύνολο προβλημάτων δύσκολο, ο επικεφαλής δάσκαλος θα πρέπει να αλλάξει τη ροή της συνεδρίας και να δώσει διαφορετικά προβλήματα. Μια άλλη δυνατότητα είναι να ξεκινήσουν οι μαθητές να λύνουν και να συζητούν τα προβλήματα μαζί, να τα χωρίσουμε σε απλούστερα μέρη, ή να δώσουμε υποδείξεις. Για παράδειγμα, αν ένα παιχνίδι παίζεται σε μια λωρίδα διαστάσεων 1×100 , η πρώτη συμβουλή είναι να απλοποιήσουμε το πρόβλημα. Ποια θα πρέπει να είναι η απάντηση αν αντί για αυτό η λωρίδα έχει διαστάσεις 1×1 , 1×2 , ή 1×3 ; Βρίσκοντας απαντήσεις σε απλούστερα προβλήματα, μπορεί κανείς να καταλάβει τη γενική περίπτωση. Συχνά είναι πολύ χρήσιμο να εξετάσουμε ειδικές περιπτώσεις για να προσπαθήσουμε να μαντέψουμε την απάντηση και στη συνέχεια να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η εικασία ήταν σωστή. Είναι σημαντικό οι μαθητές να διακρίνουν αυτές τις ενδιάμεσες εικασίες από μια σωστή λύση.

Μερικές φορές, οι μαθητές, ή ακόμα και κάποιοι δάσκαλοι, πιστεύουν ότι σε κάθε πρόβλημα θα πρέπει κανείς να εξηγήσει πώς βρήκε τη λύση. Αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, μπορεί να έχει κανείς ένα πρόβλημα όπου θα πρέπει να βρει πέντε αριθμούς με μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Αν κάποιος μα-

θητής έκανε απλώς μια εικασία από το πουθενά, αλλά βρήκε πέντε αριθμούς με τη ζητούμενη ιδιότητα, αυτό είναι θαυμάσιο: η ικανότητα να μαντεύει κανείς σωστά είναι πολύ χρήσιμη στα μαθηματικά. Φυσικά, και το να επινοήσει μια γενική μέθοδο για την εύρεση αυτών των αριθμών μπορεί επίσης να είναι σημαντικό, και είναι χρήσιμο να συζητηθεί, αλλά αυτό δεν είναι λόγος να μη θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί. Μερικές φορές η λύση είναι απλά μια εμπνευσμένη εικασία από το πουθενά.

Όταν δουλεύει κανείς με παιδιά του σχολείου, θα πρέπει να έχει πολλή υπομονή. Ένας μαθητής μπορεί αρχικά να είναι άπειρος και να καταλαβαίνει ελάχιστα πράγματα, αλλά αυτό δεν σημαίνει πως δεν μπορεί να μάθει μαθηματικά. Κάποτε είχα έναν τέτοιο μαθητή, ο οποίος αρχικά μπορούσε να κάνει μόνο τα πιο απλά πράγματα αργά και με μεγάλη δυσκολία, αλλά στη συνέχεια αποφάσισε να μελετήσει σοβαρά και δούλεψε όλο το καλοκαίρι λύνοντας μια ολόκληρη συλλογή από προβλήματα Ολυμπιάδων. Ο μαθητής έγινε δεκτός σε ένα ημερήσιο σχολείο μαθηματικών και έγινε πετυχημένος μαθηματικός.

Δεν θα πρέπει κανείς να βιάζεται να καλύψει πολλά αντικείμενα και να λύσει πολλά προβλήματα. Αν είναι φανερό ότι τα προβλήματα είναι υπερβολικά δύσκολα, θα πρέπει κανείς να προχωρήσει πιο αργά, αφιερώνοντας όλο τον απαιτούμενο χρόνο.

Μερικές φορές οι μαθητές που δεν είναι εξοικειωμένοι με τα μαθηματικά απλά δεν καταλαβαίνουν τη γλώσσα που χρησιμοποιούμε. Στα μαθηματικά υπάρχουν πολλές συμβάσεις και σιωπηρές παραδοχές. Κάποτε προσπαθούσα να βρω ένα πρόβλημα στη συνδυαστική για να λύσει κάποιος συγκεκριμένος μαθητής, και κατέληξα στο εξής: «Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε έναν άνθρωπο από δέκα ανθρώπους; Η απάντηση του μαθητή, 9, με θορύβησε. «Γιατί εννέα;», τον ρώτησα. «Δεν θα επέλεγα τον εαυτό μου», απάντησε ο μαθητής. Μιλούσαμε σε διαφορετικές γλώσσες· ο μαθητής κατάλαβε αυτή την απλούστατη διατύπωση με τον δικό του εντελώς διαφορετικό τρόπο.

Όταν οι μαθητές ανακαλύπτουν κάτι βαθύτερο, αυτό τους δίνει μεγάλη χαρά. Για παράδειγμα, ένας μαθητής καταπιάστηκε με αυτό το πρόβλημα: πόσα ζευγάρια μπορούν να φτιαχτούν από δύο ψηφία αν το πρώτο ψηφίο σε ένα ζευγάρι μπορεί να είναι οποιοδήποτε ψηφίο από το 0 μέχρι το 9, και το δεύτερο ψηφίο σε ένα ζευγάρι μπορεί να είναι οποιοδήποτε ψηφίο από το 0 μέχρι το 9; Άρχισε να γράφει τα ζευγάρια. Αρχικά έγραψε όλα τα ζευγάρια όπου και τα δύο ψηφία είναι τα ίδια, κι έτσι σταδιακά κατέληξε στο αποτέλεσμα 99 (πάρει το ζευγάρι 00). Αυτή η απάντηση τον συγκλόνισε. Για κάποιο διάστημα κοιτούσε αλλόφρων τις σημειώσεις του. Έπειτα αναφώνησε, «Είναι απλά όλοι οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 99!». Αυτός ο μαθητής έκανε μια μικρή μαθηματική ανακάλυψη, πράγμα σημαντικό, ακόμα κι αν του πήρε πολύ χρόνο για να καταλήξει σε αυτή, και παρότι έκανε ένα μικρό λάθος στην όλη διαδικασία.

Αν και δεν πρόκειται να ενδιαφερθούν όλοι για τα μαθηματικά, αν ένας μαθητής έχει την επιθυμία και την υπομονή, σίγουρα το αποτέλεσμα θα είναι καλό. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι το βιβλίο αυτό περιέχει σύνολα προβλημάτων ενός συγκεκριμένου μαθηματικού κύκλου για μια συγκεκριμένη χρονιά. Δεν έχω αλλάξει σχεδόν τίποτα, παρότι κάποια σύνολα αποδείχθηκαν τελικά πιο περίπλοκα και κάποια πιο εύκολα απ' ό,τι αναμενόταν. Τα μαθήματα ποικίλλουν από χρονιά σε χρονιά κι από τάξη σε τάξη. Αυτή η συλλογή μπορεί να βοηθήσει σημαντικά τον δάσκαλο, αλλά φυσικά δεν θα πρέπει κανείς απλά να αντιγράψει αυτά τα μαθήματα. Ανάλογα με τους μαθητές, ίσως να πρέπει να αλλάξει τα αντικείμενα, το επίπεδο δυσκολίας, τον αριθμό των προβλημάτων κ.λπ. Όλα είναι στα χέρια του δασκάλου!

Και ποια είναι η συνέχεια;

Στο τέλος της χρονιάς, ή στο τέλος ενός διετούς ή τριετούς κύκλου μαθημάτων, μερικές φορές οι μαθητές παίρνουν χιουμοριστικά πιστοποιητικά «μικρός γνώστης των μαθηματικών». Η συμμετοχή στον κύκλο δεν δίνει κανένα τυπικό προνόμιο, αλλά οι γνώσεις και οι δεξιότητες που αποκτούν τους βοηθούν πολύ περισσότερο από οποιοδήποτε πιστοποιητικό. Ωστόσο, σε μερικές περιπτώσεις ένα έγγραφο μπορεί να φανεί χρήσιμο. Κάποτε απευθύνθηκε σε μένα ένας μαθητής της Πρώτης Γυμνασίου που παραπονιόταν ότι δεν μπορούσε να εγγραφεί σε μια συγκεκριμένη καλή βιβλιοθήκη, επειδή, όπως του έλεγαν, ήταν πολύ μικρός. Το αγόρι ζήτησε το βοήθειά μου. Έγραψα μια επιστολή, αναφέροντας ότι το αγόρι ήταν καλός μαθητής στο «Μικρό MechMat», και ζήτησα να επιτραπεί στον μαθητή να εγγραφεί στη βιβλιοθήκη. Ένα επίσημο έγγραφο με τη σφραγίδα του Κρατικού Πανεπιστημίου της Μόσχας πέτυχε το ζητούμενο, και το αγόρι μπόρεσε να εγγραφεί.

Οι μαθητές που ολοκληρώνουν ένα έτος του κύκλου μπορούν να ενταχθούν στη συνέχειά του την επόμενη χρονιά. Οι δάσκαλοι του Μικρού MechMat συνήθως μεταφέρονται επίσης στην επόμενη τάξη, και κάποιοι από αυτούς οργανώνουν ομάδες για τους μαθητές που συνεχίζουν, παράλληλα με ομάδες για νεοφερμένους και για εκείνους που δεν έκαναν μεγάλη πρόοδο την προηγούμενη χρονιά. Πολλοί μαθητές εισάγονται σε ημερήσια σχολεία μαθηματικών και ξεκινούν να μελετούν το αντικείμενο πιο εντατικά. Από τους μαθητές που εισάγονται σε αυτά τα σχολεία, μερικές φορές οι μισοί έχουν συμμετάσχει σε μαθηματικούς κύκλους. Η βασική εκπαίδευση στα μαθηματικά σχολεία πραγματοποιείται στο πλαίσιο τυπικών μαθημάτων όπου η παρουσία είναι υποχρεωτική. Ωστόσο, ακόμα και σε ένα σχολείο με μαθηματικό προσανατολισμό είναι σημαντικό να υπάρχουν μαθήματα τα οποία οι μαθητές να μπορούν να

παρακολουθούν προαιρετικά. Για όλους τους μαθητές του δικού μου μαθηματικού κύκλου που ενδιαφέρονται, διοργανώνω έναν ξεχωριστό μαθηματικό κύκλο, και ένα σεμινάριο βασισμένο στο περιοδικό *Kvant*.

Σε έναν μαθηματικό κύκλο ενός μαθηματικού σχολείου συμμετέχουν συνήθως λίγοι πολύ ικανοί μαθητές, καθώς ο φόρτος του σχολικού προγράμματος είναι ήδη μεγάλος. Οι συνεδρίες έχουν πολύ άτυπο χαρακτήρα. Συχνά απλά φέρνω μια συλλογή από προβλήματα Ολυμπιάδων και, μπροστά στην τάξη, επιλέγω τα προβλήματα που μου αρέσουν. Οι μαθητές μπορούν να συμμετέχουν στην επιλογή. Ο δάσκαλος μπορεί να κάνει μια συνεδρία για κάποιο θέμα, ή να εισαγάγει στους μαθητές κάποια ενδιαφέρουσα ιδέα. Μερικές φορές, οι ίδιοι οι μαθητές φέρνουν προβλήματα, και τα λύνουμε. Οι λάτρεις της γεωμετρίας φωνάζουν «Δώστε μας ένα ενδιαφέρον πρόβλημα γεωμετρίας». Αρχικά οι λύσεις συζητιούνται με τους μαθητές σε ατομικό επίπεδο, και στη συνέχεια καθένας μπορεί να παρουσιάσει τη λύση του στον πίνακα. Μερικές φορές, αν το πρόβλημα είναι δύσκολο, το λύνουμε μαζί. Ο χρόνος αυτός είναι συναρπαστικός για τα παιδιά. Μετά τον κύκλο έχουμε τσάι και κουλουράκια.

Από τότε που εργάζομαι στο *Kvant*, διοργανώνω ένα σεμινάριο συνδεδεμένο με αυτό το περιοδικό. Τα άρθρα που στέλνονται στο περιοδικό αξιολογούνται από κριτές, αλλά οι κριτές δεν είναι μόνο ειδήμονες στα μαθηματικά – ένας από αυτούς είναι μαθητής. Ο μαθητής θα πρέπει να κατανοήσει το άρθρο και να δώσει μια ομιλία για αυτό. Στο πλαίσιο της ομιλίας, την οποία παρακολουθούν δάσκαλοι και μαθητές, ο ομιλητής απαντά ερωτήσεις από άλλους μαθητές. Συχνά σκεπτόμαστε μαζί κάποιο δύσκολο σημείο. Το σεμινάριο έχει κάποια ομοιότητα με ερευνητικό σεμινάριο στο ότι μερικές φορές είναι δύσκολο να καταλάβει κανείς τι είχε κατά νου ο συγγραφέας. Μερικές φορές βρίσκουμε τυπογραφικά λάθη, σφάλματα, ή δυσνόητα κομμάτια. Γράφουμε μια αξιολόγηση για τον συγγραφέα με υποδείξεις για το πώς μπορεί να βελτιώσει το άρθρο. Αυτή είναι πολύ σημαντική πληροφορία, καθώς προέρχεται από πιθανούς αναγνώστες. Τα παιδιά αντιλαμβάνονται ότι η δουλειά που κάνουν είναι σημαντική· καθορίζουν αν ένα άρθρο θα δημοσιευτεί. Το να βλέπουν αργότερα το άρθρο στο περιοδικό τα ενθαρρύνει πολύ. Μάλιστα, μερικές φορές υπάρχει και κάποια αντιπαράθεση σχετικά με το ποιος θα δώσει ομιλία στο επόμενο σεμινάριο. Συχνά, υπάρχουν πολλοί μαθητές πρόθυμοι για αυτό.

Πέρα από τα προφανή οφέλη για το περιοδικό, υπάρχει ένα τεράστιο κέρδος για τους μαθητές, καθώς μαθαίνουν να διαβάζουν μαθηματικά άρθρα και να τα κατανοούν μόνοι τους. Αυτό είναι κάτι που λείπει σε μια κανονική τάξη. Οι μαθητές μαθαίνουν να μιλούν και μαθαίνουν να ακούν. Το σεμινάριο τελειώνει με τσάι και επιπλέον ανεπίσημες συζητήσεις. Αν και δεν μπορούν όλοι οι μαθητές να δώσουν μια καλή ομιλία, όλοι τους προσπαθούν και σταδιακά μαθαίνουν. Μάλιστα, οι ομιλίες μερικών από τους μαθητές είναι καλύτερες

από πολλές ομιλίες καθηγητών πανεπιστημίου. Ένας δάσκαλος μπορεί επίσης να βασίσει ένα σεμινάριο σε παλιά άρθρα, όπως κάνω εγώ. Από το 1990 μέχρι το 2001, εκδιδόταν από την Εθνική Ομοσπονδία Δασκάλων Θετικών Επιστημών των ΗΠΑ και από την Springer-Verlag το αμερικάνικο «αδελφάκι» του *Kvant*, το περιοδικό *Quantum*, το οποίο αποτελεί πολύ καλή πηγή για αυτού του είδους την εργασία. [Σ.τ.Μ.: Το περιοδικό *Quantum* εκδιδόταν στα ελληνικά από τις εκδόσεις Κάτοπτρο στο διάστημα 1994-2001. Τα 44 τεύχη που εκδόθηκαν συνολικά υπάρχουν ελεύθερα διαθέσιμα στον ιστότοπο <https://ph403.edu.physics.uoc.gr/quantum.php>.]

Από πού προέρχονται τα προβλήματα αυτού του βιβλίου;

Σχεδόν κανένα από τα προβλήματα του βιβλίου δεν το έχω επινοήσει εγώ· έχουν επιλεγεί από πολλές πηγές, όπως συλλογές από διάφορες Ολυμπιάδες και μαθηματικούς κύκλους, βιβλία, περιοδικά, και μερικές φορές από την προφορική λαϊκή παράδοση. Πολλά προβλήματα έχουν ενταχθεί στη λαϊκή παράδοση τόσο παλιά που φαίνεται αδύνατο να κατονομάσουμε τους δημιουργούς τους. Η δική μου συνεισφορά είναι ότι τα επέλεξα, τα συνέθεσα σε σύνολα για συνεδρίες του κύκλου, και έγραψα λύσεις. Ελπίζω ότι το βιβλίο αυτό θα είναι ενδιαφέρον για τους μαθητές που αγαπούν τα μαθηματικά και δεν φοβούνται τις δυσκολίες, και ίσως μάλιστα να βοηθήσει κάποιον να ερωτευτεί τα μαθηματικά.