Πρόλογος στην ελληνική έκδοση

Ο τόμος *Ένας μοσχοβίτικος μαθηματικός κύκλος – Εβδομαδιαία σύνολα προβλημάτων* εντάσσεται στη σειρά «Συναρπαστική Επιστήμη» και, ταυτοχρόνως, είναι το τέταρτο βιβλίο της (υπο)σειράς, «Μαθηματικές Αναζητήσεις», που έχω την τιμή να διευθύνω στις Εκδόσεις Εφαλτήριο. Στις «Μαθηματικές Αναζητήσεις» έχουν προηγουμένως εκδοθεί τα ακόλουθα τρία βιβλία: Serge Tabachnikov (επιμ.), *Kvant Selecta: Άλγεβρα και Ανάλυση, I*, Serge Tabachnikov (επιμ.), *Kvant Selecta: Συνδυαστική* και Dmitri Fomin, Sergey Genkin & Ilia V. Itenberg, *Μαθηματικοί Κύκλοι – Η ρωσική εμπειρία*.

Με το ανά χείρας βιβλίο, δεν βρισκόμαστε απλώς ενώπιον μιας αξιόλογης συλλογής ωραίων μαθηματικών προβλημάτων. Πρόκειται για μια πολύ προσεκτικά σχεδιασμένη σειρά εβδομαδιαίων συνόλων προβλημάτων που προέρχονται από αντίστοιχες συνεδρίες ενός ετήσιου μαθηματικού κύκλου για μαθήτριες και μαθητές της Δευτέρας Γυμνασίου. Αφορά την ύλη που διδάχθηκε –όπως αναφέρει ο συγγραφέας του βιβλίου, Sergey Dorichenko, στον Πρόλογο που έγραψε για την πρωτότυπη έκδοση του βιβλίου από την American Mathematical Society, στην εξαιρετική σειρά της MSRI Mathematical Circles Library– αφ' ενός σε έναν μαθηματικό κύκλο ο οποίος διοργανώθηκε από το Μαθηματικό Τμήμα του Κρατικού Πανεπιστημίου της Μόσχας, και αφ' ετέρου, σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και με διαφορετικές ομάδες μαθητών, σε έναν άλλο μαθηματικό όμιλο, που λειτουργούσε στο Σχολείο Αριθμός 57 της Μόσχας, ένα σχολείο με ισχυρό προσανατολισμό και έμφαση στα μαθηματικά.

Η αναγνώστρια και ο αναγνώστης του βιβλίου των Dmitri Fomin, Sergey Genkin & Ilia V. Itenberg *Μαθηματικοί Κύκλοι – Η ρωσική εμπειρία* γνωρίζουν ήδη τον σημαντικό ρόλο που διαδραμάτισε στο παρελθόν και εξακολουθεί να διαδραματίζει και σήμερα ο θεσμός των μαθηματικών ομίλων (ή κύκλων) στην παροχή υψηλής μαθηματικής παιδείας στη Ρωσία. Η λειτουργία των μαθηματικών κύκλων συνδέεται, όσον αφορά τη στοχοθεσία και την αποστολή, και με το σπάνιο στο είδος του –αφού αποτελεί μια «γέφυρα» μεταξύ της δευτεροβάθμιας και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης– περιοδικό για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, *KVANT*.

Το ερώτημα, όμως, που ενδέχεται να σας προβληματίσει, με βάση την προηγηθείσα αναφορά στο Σχολείο Αριθμός 57 της Μόσχας, είναι το τι είδος, ακριβώς, σχολείων είναι τα ειδικά μαθηματικά σχολεία που λειτουργούν σε διάφορες πόλεις της Ρωσίας, όπως, π.χ., στη Μόσχα, στην Αγία Πετρούπολη (παλαιότερα Λένινγκραντ) και στο Νοβοσιμπίρσκ. Όπως διαβάζει κανείς στο σχετικό λήμμα της Wikipedia,[*] το Σχολείο Αριθμός 57 της Μόσχας,[†] που ιδρύθηκε το 1877 και έλαβε το σημερινό του όνομα το 1936, απέκτησε τον ιδιαίτερο μαθηματικό προσανατολισμό του το 1968, όταν ο Nikolai Konstantinov, εξαίρετος παιδαγωγός στα μαθηματικά (συγκρατήστε αυτό το όνομα, θα το ξανασυναντήσετε και πιο κάτω στο παρόν κείμενο!),[‡] δημιούργησε ειδικές μαθηματικές τάξεις σε αυτό. Σε σύντομο χρονικό διάστημα, το σχολείο απέκτησε εξαιρετική φήμη στα μαθηματικά (σήμερα, μάλιστα, είναι φημισμένο για την παιδεία που προσφέρει, πέραν των μαθηματικών, της φυσικής και των λοιπών θετικών επιστημών, και στη λογοτεχνία, την ποίηση και τις ανθρωπιστικές επιστήμες).

Εάν, μάλιστα, κάποιος/α θέλει να μάθει περισσότερα για αυτά τα ειδικά μαθηματικά σχολεία και για το πώς διδάσκονται τα μαθηματικά σε αυτά, ας διαβάσει το κεφάλαιο, «Ένα σχολείο διαφορετικό απ' όλα τα άλλα», στο εξαιρετικό βιβλίο της Messa Gessen *Ο Ρώσος μαθηματικός Γκρίσα Πέρελμαν*.[§] Σε αυτό περιγράφεται η συναρπαστική ιστορία της δημιουργίας του Σχολείου Αριθμός 239 του Λένινγκραντ –ενός σχολείου ανάλογου με το Σχολείο Αριθμός 59 της Μόσχας– όπου φοίτησε ο Γκριγκόρι (Γκρίσα) Πέρελμαν, ο οποίος απέδειξε την περίφημη «Εικασία Πουνκαρέ», ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα της τοπολογίας. Η «Εικασία Πουανκαρέ» ανήκε στη λίστα των «προβλημάτων της χιλιετίας» (millennium prize problems) του Clay Mathematics Institute (η επίλυση καθενός από αυτά τα προβλήματα προσφέρει ως βραβείο στον λύτη ή τους λύτες το ποσόν του ενός εκατομμυρίου δολαρίων). Ο Πέρελμαν αρνήθηκε να παραλάβει αυτό το βραβείο, όπως είχε πράξει προηγουμένως και με το Fields Medal (την πιο σημαντική διάκριση στα μαθηματικά για μαθηματικούς έως 40 ετών), που του απονεμήθηκε το 2006.

Αξίζει, τώρα, να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη συλλογή προβλημάτων του παρόντος τόμου, προκειμένου να σημειώσουμε ότι τη χαρακτηρίζει μια ιδιαίτερη «αρχιτεκτονική», αφού σε κάθε συνεδρία του μαθηματικού κύκλου του μοσχοβίτικου Σχολείου Αριθμός 59 εισάγεται ένα νέο θέμα ή μία νέα τεχνική, ενώ συχνά υπάρχουν και προβλήματα που πραγματεύονται θέματα που έχουν προηγουμένως αναπτυχθεί ή που η επίλυσή τους στηρίζεται σε μικρή παραλλαγή κάποιας τεχνικής που έχει ήδη διδαχθεί. Η παιδαγωγική αξία αυτής της μεθόδου διδασκαλίας θα καταστεί προφανής –είμαι βέβαιος– και σε

---

[*] Βλ. `https://en.wikipedia.org/wiki/Moscow_State_School_57`.

[†] Βλ. `https://sch57.ru/index.en.html`.

[‡] `https://www.mathnet.ru/links/ae0e9406dbb9bc61f7a89f6f6566749e/rm10052_eng.pdf`

[§] Masha Gessen, *Ο Ρώσος μαθηματικός Γκρίσα Πέρελμαν*, μετάφραση: Κωνσταντίνος Σίμος, επιστημονική επιμέλεια: Θεοφάνης Γραμμένος, Εκδοτικός Οίκος Τραυλός, Αθήνα, 2009.

όποιον/α αποφασίσει να χρησιμοποιήσει αυτή τη συλλογή προβλημάτων ως ύλη σε κάποιον από τους μαθηματικούς ομίλους που λειτουργούν σε διάφορα σχολεία μέσης εκπαίδευσης στην Ελλάδα.

Τέλος, από τον Πρόλογο του Sergey Dorichenko, που ακολουθεί και καλό είναι να διαβαστεί ολόκληρος με προσοχή, έχουν ιδιαίτερη αξία οι ακόλουθες τρεις επισημάνσεις για την τέχνη της επίλυσης προβλημάτων (problem-solving), πολλώ μάλλον καθώς παρατίθενται συγκεκριμένα μαθηματικά παραδείγματα στις δύο από αυτές:

1) «Μια λύση πιθανόν να μην απαιτεί εφευρετική σκέψη, αλλά μόνο κάποια δουλειά, ενώ μια άλλη ίσως να περιλαμβάνει μια ενδιαφέρουσα ιδέα που θα έδινε στον μαθητή τη δυνατότητα να λύσει το πρόβλημα εύκολα, γρήγορα και κομψά. Για παράδειγμα, ας δούμε το εξής ερώτημα: Τι είναι μεγαλύτερο, το άθροισμα των πρώτων 50 περιττών φυσικών αριθμών ή το άθροισμα των πρώτων 50 άρτιων φυσικών αριθμών, και κατά πόσο; Κάποιοι μαθητές θα υπολογίσουν και τα δύο αθροίσματα και θα τα συγκρίνουν, αλλά η απάντηση μπορεί στην πραγματικότητα να γίνει προφανής χωρίς αυτούς τους χρονοβόρους υπολογισμούς. **Είναι πολύ χρήσιμο να θέτει κανείς προβλήματα που έχουν μια διαισθητικά προφανή αλλά λάθος απάντηση.** Για παράδειγμα: είναι δυνατόν το γινόμενο ab να διαιρείται με το c^2 αν κανένας από τους a και b δεν διαιρείται με το c; Η «προφανής» απάντηση είναι, βέβαια, όχι. Αλλά στην πραγματικότητα, το γινόμενο ab μπορεί να διαιρείται με το c^2, ή ακόμα και με το c^{100}. Το πρόβλημα αυτό κάνει εντύπωση!» (σελ. xxiii).

2) «Για τους μικρότερους μαθητές, είναι καλό πολλές συνεδρίες να περιλαμβάνουν ανάμεσα στα βασικά προβλήματα κάποιο μαθηματικό παιχνίδι. Τα παιδιά μπορούν να παίξουν αυτό το παιχνίδι μόνα τους, το ένα με το άλλο, ή με κάποιον δάσκαλο. Μπορεί κανείς να διδάξει στα παιδιά πολλές ιδέες με τη βοήθεια προβλημάτων με παιχνίδια. Και τι θα πρέπει να κάνουμε αν ένας μαθητής προσπαθεί επίμονα να παρουσιάσει μια λύση σε ένα πρόβλημα παιχνιδιού η οποία βασίζεται σε λάθος στρατηγική; Φυσικά, ο δάσκαλος θα πρέπει να παίξει μαζί του αυτό το παιχνίδι, αλλά κάνοντας τι; Νικώντας τον; Αυτό δεν είναι πολύ καλό. Πιθανόν με αυτό τον τρόπο να αποκαλύψει την ιδέα για τη λύση ή να αποθαρρύνει τον μαθητή. **Υπάρχει μια υπέροχη τεχνική που την έμαθα από τον Nikolai Konstantinov. Ο δάσκαλος θα πρέπει να υιοθετήσει τη στρατηγική του μαθητή και να χάσει. Αν ο μαθητής κάνει άστοχες κινήσεις, ο δάσκαλος μπορεί να υποδείξει τις σωστές και να διορθώσει τις λάθος, αλλά ακολουθώντας ταυτόχρονα τη στρατηγική του μαθητή συνεχώς. Με τον τρόπο αυτό, ο μαθητής θα νικήσει, που είναι σημαντικό, και ταυτόχρονα θα δει ότι η στρατηγική του είναι λάθος.**» (σελ. xxv).

3) «**Συχνά οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ότι είναι απαραίτητο να σκεφτούν πάνω στο πρόβλημα για να μπορέσουν να το λύσουν. Στο σχολείο,**

πολλοί μαθητές αναπτύσσουν τη συνήθεια να ακολουθούν κάποια ρουτίνα, συχνά χωρίς να καταλαβαίνουν το νόημά της. Ένας φίλος μου, ο καθηγητής πανεπιστημίου Gregory Rybnikov, μου έχει πει ότι κάποτε έθεσε σε μια εξέταση διακριτών μαθηματικών σε έναν αρκετά καλό φοιτητή το εξής μη τυπικό πρόβλημα: «Να αποδειχθεί ότι αν $N > 1$, σε κάθε παρέα N ανθρώπων θα υπάρχουν πάντα δύο που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων σε αυτή την παρέα». Για πολλή ώρα, ο φοιτητής δεν μπορούσε να καταλάβει πώς θα έπρεπε να προσεγγίσει αυτό το πρόβλημα, και κατόπιν ο δάσκαλος του έδωσε μια υπόδειξη. «Ας σκεφτούμε με βάση την απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι όλα τα μέλη της παρέας έχουν διαφορετικό αριθμό φίλων. Παρατήρησε ότι κάθε μέλος της παρέας έχει το πολύ $N-1$ φίλους.» «Κατάλαβα», είπε ο φοιτητής, «ο συνολικός αριθμός των ανθρώπων είναι N, και ο καθένας μπορεί να έχει από 0 μέχρι $N-1$ φίλους, οπότε υπάρχει ο ίδιος αριθμός δυνατοτήτων N. Αυτό σημαίνει ότι κάποιος έχει 0 φίλους, κάποιος έχει έναν, κάποιος έχει δύο, και ούτω καθεξής μέχρι τον αριθμό $N-1$. Α, αυτό είναι μια αριθμητική πρόοδος! Μπορώ να βρω το άθροισμά της.» Το άθροισμα μιας αριθμητικής προόδου δεν έχει απολύτως καμία σχέση με αυτό το πρόβλημα, αλλά ο φοιτητής, που είχε ήδη σχεδόν λύσει το πρόβλημα, μπερδεύτηκε. Είχε συνηθίσει να ακολουθεί κάποια ρουτίνα – αν υπάρχει μια αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει μάλλον να βρούμε το άθροισμά της.» (σελ. xxvi).

Εύχομαι αυτό το βιβλίο να είναι καλοτάξιδο και να βοηθήσει στην ανάπτυξη της αγάπης για τα μαθηματικά σε μαθητές Γυμνασίων και Λυκείων της χώρας μας, όπως και να πείσει πολλούς από εκείνους που ειλικρινώς αγαπούν τα μαθηματικά να πιάσουν χαρτί και μολύβι και να ασχοληθούν με την επίλυση των προβλημάτων που περιέχει!

Γιώργος Λ. Ευαγγελόπουλος
Νέα Μάκρη, 25 Ιανουαρίου 2024